

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de depósito: 14/02/2006

Assinatura: \_\_\_\_\_

## Índice de equações diferenciais binárias

*Lizandro Sanchez Challapa*

**Orientadora:** *Profa. Dra. Maria Aparecida Soares Ruas*

**Co-orientador:** *Prof. Dr. Farid Tari*

tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e  
de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para  
obtenção do título de Doutorado em Matemática.

USP - São Carlos

Fevereiro/2006

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

---

# Índice de equações diferenciais binárias

*Lizandro Sanchez Challapa*

---

Aos meus pais Nicolas e Remigia.

# *Agradecimentos*

---

À Profa. Dra. Maria Aparecida Soares Ruas, pela orientação e incentivo recebidos durante todo o programa de Doutorado; pelos seus valiosos ensinamentos, conhecimentos, e pela inestimável orientação, dedicação e acompanhamento. Sua participação foi fundamental para o êxito deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Farid Tari, pela confiança em mim depositada, quando aceitou ser meu orientador, pela sugestão do tema deste trabalho, e por me introduzir com segurança ao estudo das singularidades das equações diferenciais implícitas. Os comentários críticos que fez durante o desenvolvimento da tese foram relevantes para o seu desenvolvimento.

Aos meus pais, Nicolas e Remigia, e minha irmã, Nelly, pelo amor, compreensão, preocupação e apoio durante todo este tempo longe de casa. Minha eterna gratidão!

As primeiras pessoas com quem tive contato e fizeram da minha estadia no Brasil agradável: Cesar, Eduardo Ilapa, Alex, Fabiolo, Eduardo e Mariana.

Aos colegas de estudo: João, Elenice, Elíris, Karina, Esdras, Zé Paulo, Roland, Maurício, Silas, Aldicio, Marcos e Nivaldo.

Aos funcionários do ICMC-USP, pela amizade e atenção dispensada.

À FAPESP pelo apoio financeiro recebido durante este trabalho.

# *Resumo*

---

Neste trabalho estudamos as equações diferenciais binárias em uma vizinhança de um ponto singular isolado. Usando a abordagem geométrica de Bruce e Tari para o estudo da multiplicidade de uma equação diferencial binária, introduzimos uma definição de índice para esta classe de equações, o qual coincide com a definição clássica de Hopf para o índice de equações diferenciais binárias positivas. O principal resultado é uma fórmula que expressa o índice em termos de informação obtida a partir dos coeficientes da equação original. A invariância do índice por equivalências suaves é também estudada. Para uma classe especial de equações diferenciais implícitas, relacionamos o índice da equação com índices de especiais 1-formas e campos vetoriais em variedades com singularidades isoladas.

# *Abstract*

---

In this work we study binary differential equations in a neighborhood of an isolated singular point. Following the geometric approach of Bruce and Tari in their work on multiplicity of a binary differential equation, we introduce a new definition of index for this class of equations, which coincides with the classical definition by Hopf for positive binary differential equations. The main result is a formula expressing the index in terms of information obtained from the coefficients of the original equation. The invariance of the index by smooth equivalences is also proved. Some results relating the index with the indices of 1-forms and vector fields in singular varieties are given for a special class of implicit differential equations.

# Sumário

---

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>4</b>
1.1 Preliminares da Teoria de Singularidades . . . . .	4
1.2 Transversalidade . . . . .	8
1.3 Conjuntos algébricos e semialgébricos . . . . .	9
1.4 Conjuntos analíticos, semianalíticos e subanalíticos . . . . .	11
<b>2 Índices em variedades singulares</b>	<b>13</b>
2.1 Índice de campos vetoriais em variedades suaves . . . . .	13
2.2 Índice de campos vetoriais em variedades singulares . . . . .	16
2.3 Índice de 1-formas diferenciais em variedades singulares . . . . .	18
<b>3 Equações diferenciais implícitas</b>	<b>21</b>
3.1 Pontos singulares . . . . .	21
3.2 Formas normais de uma EDI . . . . .	25
3.3 Invariantes de EDI's . . . . .	27
<b>4 Equações diferenciais binárias</b>	<b>29</b>
4.1 Pontos singulares de EDB's . . . . .	29
4.2 Relações de equivalências de EDB's e formas normais . . . . .	36
4.3 Invariantes de equações diferenciais binárias . . . . .	40
<b>5 Perturbações de equações diferenciais binárias</b>	<b>41</b>

<b>6</b>	<b>Índice de uma equação diferencial binária</b>	<b>49</b>
6.1	Definição do índice . . . . .	49
6.2	Invariância de $I(E, 0)$ . . . . .	57
6.3	Índice de EDB's com coeficientes suaves . . . . .	66
6.4	Invariância do $J(E, 0)$ . . . . .	68
<b>7</b>	<b>Equações diferenciais implícitas com <math>F_{pp}(0) \neq 0</math></b>	<b>70</b>
7.1	Índice de uma EDI quando $F_{pp}(0) \neq 0$ . . . . .	70
7.2	A equação $dy^2 - \delta(x, y)dx^2 = 0$ . . . . .	75
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>78</b>

# Introdução

---

Uma equação diferencial implícita (EDI) é uma equação da forma

$$F(x, y, p) = 0, \quad (1)$$

onde  $p = \frac{dy}{dx}$  e  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave. As singularidades das EDI's foram estudadas por Lak Dara em [14]. Ele mostrou que em uma vizinhança de um ponto singular regular (ver Definição 3.5) a forma normal é dada por  $p^2 = x$ , e em pontos singulares não regulares mostrou que existe um conjunto aberto e denso no espaço das todas as funções  $F$  de  $\mathbb{R}^3$  em  $\mathbb{R}$  com a  $C^3$ -topologia de Whitney tais que os pontos singulares não regulares são de cinco tipos. Os três primeiros são de tipo sela, nó ou foco e os dois últimos são de tipo cúspide elíptica ou hiperbólica (Teorema 3.9). Davydov em [15], mostrou que em uma vizinhança de um ponto singular de tipo sela, nó ou foco as formas normais são  $p^2 + y - \frac{1}{2}x^2 = 0$ ,  $p^2 + y + \frac{1}{18}x^2 = 0$  ou  $p^2 + y + \frac{1}{8}x^2 = 0$ , respectivamente, e provou que as formas normais em uma vizinhança de um ponto singular de tipo cúspide elíptica e hiperbólica, têm módulo funcional.

Quando  $F_{pp}(0) \neq 0$ , a Equação (1) se identifica, numa vizinhança da origem, a uma equação diferencial binária (EDB) da forma

$$E(x, y)[dx, dy] = a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 = 0 \quad (2)$$

onde  $a, b, c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  são funções suaves. Prova-se usando o Teorema 3.9 que genericamente os únicos pontos singulares são de tipo sela, nó ou foco, e portanto nesta classe de equações, não acontece moduli. Este tipo de equações aparece em vários ramos da matemática em particular em geometria diferencial, por exemplo, no estudo das linhas de curvatura e no estudo das linhas assintóticas de uma superfície em  $\mathbb{R}^3$ .

Quando a equação diferencial binária é positiva, isto é,  $\delta = b^2 - ac > 0$  e  $\delta(x, y) = 0$  se,

somente se,  $a(x, y) = b(x, y) = c(x, y) = 0$ , Hopf define em [32] um índice para este tipo de equações em um ponto singular isolado da EDB (ver Teorema 4.16). Este índice é um invariante topológico no espaço das equações diferenciais binárias positivas. Nesta direção, J. W. Bruce e Farid Tari em [9] introduzem a multiplicidade de uma EDB, numa vizinhança da origem, como o número máximo de pontos singulares de tipo sela, nó ou foco de uma perturbação genérica da EDB dada por

$$E_t(x, y)[dx, dy] = a_t(x, y)dy^2 + 2b_t(x, y)dxdy + c_t(x, y)dx^2 = 0. \quad (3)$$

Procuramos neste trabalho estender a definição do índice, dada por Hopf (Teorema 4.16), para EDB's não necessariamente positivas usando as idéias da multiplicidade de uma EDB introduzidas por J. W. Bruce e Farid Tari em [9].

Quando os coeficientes da equação diferencial binária são analíticos reais, definimos um índice em termos de perturbações boas da EDB (ver Definição 6.5) e mostramos no Teorema 6.8 que este índice independe das perturbações boas escolhidas, exibindo uma fórmula que expressa o índice em termos de informações obtidas a partir dos coeficientes da equação original. A invariância do índice por equivalências analíticas é provada no Teorema 6.18.

Para EDB's com coeficientes suaves que satisfazem a uma condição de finitude, o índice é definido usando a fórmula dada no Teorema 6.8. A invariância por equivalências suaves é provada usando um tipo de desigualdade de Lojasiewicz dada no Teorema 6.23 e a existência da perturbação dada no Teorema 5.9.

Uma equação diferencial binária com coeficientes não todos nulos na origem pode ser interpretada como uma equação implícita  $F(x, y, p) = 0$ ,  $p = \frac{dy}{dx}$ , com  $F_{pp}(0) \neq 0$ . Para esta classe de equações, relacionamos o índice da EDI com o índice da 1-forma  $\omega = dy - pdx$  e o índice do campo gradiente de  $F$ , definidos sobre a variedade singular  $F = 0$ . A extensão destes resultados para equações diferenciais binárias com coeficientes nulos na origem é um problema aberto, cuja solução vai depender do estudo de formas diferenciais com singularidades não isoladas definidas em variedades singulares.

O primeiro capítulo deste trabalho trata sobre fatos básicos da Teoria das Singularidades e as propriedades de conjuntos algébricos, semialgébricos, analíticos, semianalíticos e subanalíticos.

No capítulo 2, apresentamos algumas propriedades do índice de um campo vetorial sobre uma variedade suave e apresentamos resultados sobre índice para campos vetoriais e 1-formas em variedades com singularidades isoladas, estudadas por W. Ebeling e S. M. Gusein-Zade em [18].

No capítulo 3, mostramos resultados conhecidos de equações diferenciais implícitas (EDI's) como, por exemplo, as formas normais de uma equação diferencial implícita em torno de pontos singulares genéricos e um invariante diferenciável para uma EDI.

O capítulo 4 é dedicado ao estudo dos pontos singulares de uma equação diferencial binária. O principal resultado é o Teorema 4.8. Neste capítulo introduzimos uma relação de equivalência no conjunto de todas as EDB's, a noção de perturbações boas de equações diferenciais binárias e apresentamos alguns invariantes conhecidos de EDB's.

No capítulo 5, provamos a existência de perturbações boas para equações diferenciais binárias com coeficientes analíticos reais e mostramos a existência de perturbações para EDB's com coeficientes não necessariamente analíticos, as quais satisfazem algumas propriedades úteis.

O capítulo 6 contém os principais resultados do trabalho. Definimos o índice de uma EDB com coeficientes analíticos reais em termos de perturbações boas e mostramos no Teorema 6.8 que este índice independe das perturbações boas escolhidas, exibindo uma fórmula que expressa o índice em termos dos coeficientes da equação original. No Teorema 6.17, mostramos que o índice da EDB é invariante por equivalências analíticas reais. Mostramos ainda como estender o índice para uma classe de equações diferenciais binárias com coeficientes suaves.

No último capítulo, capítulo 7, definimos um índice para EDI's analíticas reais quando  $F_{PP} \neq 0$  em um ponto singular isolado e mostramos que este índice pode ser expresso em termos do índice da 1-forma  $\omega = dy - p dx$  e do índice do gradiente de  $F$ . Usando a Teoria de Singularidades estudamos os pontos singulares e as perturbações boas de um tipo especial de EDI.

# Preliminares

Na primeira parte deste capítulo introduzimos as notações e definições básicas, usualmente utilizadas na Teoria de Singularidades. Em seguida, definimos as seguintes categorias de conjuntos: algébricos, semialgébricos, analíticos, semianalíticos e subanalíticos. Os resultados descritos nas Seções 1.1, 1.2, 1.3 e 1.4 podem ser encontrados nas referências [3], [4], [25], [34] e [47].

## 1.1 Preliminares da Teoria de Singularidades

Seja  $x \in \mathbb{R}^n$ . Consideremos o conjunto das aplicações suaves definidas numa vizinhança de  $x \in \mathbb{R}^n$  com valores em  $\mathbb{R}^m$ . Neste conjunto vamos introduzir uma relação de equivalência. Sejam  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  neste conjunto. Dizemos que  $f$  é equivalente a  $g$  se existir uma vizinhança  $W$  de  $x$  em  $\mathbb{R}^n$  tal que  $f|_W = g|_W$ .

**Definição 1.1.** *As classes de equivalência são chamadas de germes de aplicações suaves em  $x$ .*

Notação:  $f : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^m, y)$ , onde  $y = f(x)$ . Dizemos que  $x$  é a fonte do germe e  $y$  é meta do germe.

O conjunto de todos os germes de aplicações suaves com fonte  $x = 0$ ,  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^m$  será denotado por  $\mathcal{E}_{n,m}$ . Quando  $m = 1$ , indicaremos apenas por  $\mathcal{E}_n$ . O anel  $\mathcal{E}_n$  é local e tem como único ideal maximal  $m_n = \{f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R} \mid f(0) = 0\} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ . Analogamente, indicaremos por  $\mathcal{O}_n$  o anel de germes  $f : (\mathbb{K}^n, 0) \rightarrow \mathbb{K}$ , com  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , com  $f$  analítica real quando  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou holomorfa quando  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

A classe de equivalência das aplicações suaves cujas derivadas na origem coincidem até a

ordem  $r$ , no desenvolvimento de Taylor omitindo-se o termo constante, é denominada  $r$ -jato de  $f$  na origem, e a notação usada é  $j^r f(0)$ . O conjunto de todos os  $r$ -jatos é denotado por  $J^r(n, m)$ .

Denotaremos a  $\mathbb{R}$ -álgebra local de  $f$  por  $Q(f) = \mathcal{E}_n / \langle f \rangle$ , onde  $\langle f \rangle = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$  é o ideal de  $\mathcal{E}_n$  gerado pelas funções coordenadas de  $f$ .

**Definição 1.2.** Dizemos que o germe  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow \mathbb{R}^m$  é finito se a dimensão da  $\mathbb{R}$ -álgebra local  $Q(f)$  é finita.

Vários grupos agem em  $\mathcal{E}_{n,m}$ . Quando dois elementos  $f, g \in \mathcal{E}_{n,m}$  estão em uma mesma órbita segundo a ação do grupo  $\mathcal{G}$ , dizemos que  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{G}$ -equivalentes e denotamos por  $f \stackrel{\mathcal{G}}{\sim} g$ .

As relações de equivalência de nosso interesse são aquelas definidas pelas ações dos seguintes grupos (de Mather):

**Definição 1.3.** Seja  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$ . Definimos:

$\mathcal{R}$  = grupo dos germes de difeomorfismos  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  cuja ação em  $f$  é a composição à direita, isto é,  $f \circ h^{-1}$ .

$\mathcal{C}$  = grupo dos germes de difeomorfismos  $H : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, 0)$  tais que  $H(x, y) = (x, \theta(x, y))$  e  $H(x, 0) = (x, 0)$ . A aplicação  $\theta_x$  é um difeomorfismo de  $\mathbb{R}^m$ , dependendo de  $x \in \mathbb{R}^n$ , sua ação transforma  $f$  na aplicação

$$x \longmapsto \theta_x(f(x)).$$

Equivalentemente,  $H$  age no gráfico de  $f$  em  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ .

$\mathcal{K}$  =  $\mathcal{R} \times \mathcal{C}$  (produto semi-direto). É o grupo formado pelos germes de difeomorfismos  $H : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, 0)$  que são escritos na forma  $H(x, y) = (h(x), \theta(x, y))$ , com  $h \in \mathcal{R}$  e  $H(x, 0) = (h(x), 0)$ . O diagrama comutativo abaixo descreve uma  $\mathcal{K}$ -equivalência entre os germes  $f$  e  $g : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$ :

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{(id, f)} & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, 0) & \xrightarrow{\pi_n} & (\mathbb{R}^n, 0) \\ h \downarrow & & H \downarrow & & h \downarrow \\ (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{(id, g)} & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, 0) & \xrightarrow{\pi_n} & (\mathbb{R}^n, 0) \end{array}$$

onde  $id : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  é a aplicação identidade do  $\mathbb{R}^n$  e  $\pi_n : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  a projeção canônica. Note que  $H$  age no gráfico da  $f$ , aplicando-o no gráfico da  $g$ .

Notação.  $f \overset{\mathcal{K}}{\sim} g$

O grupo  $\mathcal{K}$  é chamado grupo de contato. O grupo  $\mathcal{C}$  é subgrupo normal de  $\mathcal{K}$ .

**Definição 1.4.**  $C^l$ - $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{G} = \mathcal{R}$ ,  $\mathcal{C}$  ou  $\mathcal{K}$ ,  $l \geq 0$ , são definidos como acima, tomando difeomorfismos de classe  $C^l$ ,  $l \geq 1$  ou homeomorfismo, quando  $l = 0$ .

A classe dos germes de interesse é a daqueles que podem ser representados pelo seu polinômio de Taylor de alguma ordem. A linguagem básica para isto envolve o conceito de determinação finita. Muitos trabalhos são dedicados à caracterização da determinação finita e outros buscam encontrar estimativas para a ordem de determinação, com respeito às várias relações de equivalência. Como estamos interessados particularmente no grupo  $\mathcal{K}$ , introduzimos o conceito de germe  $\mathcal{K}$ -finitamente determinado. Para outros grupos de Mather a definição é análoga. A referencia básica para este assunto é [47].

**Definição 1.5.** Um germe  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$  é  $r$ - $C^l$ - $\mathcal{K}$ -determinado,  $l \geq 0$ , se para todo germe  $g : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$  com  $j^r f = j^r g$  então  $f$  é  $C^l$ - $\mathcal{K}$ -equivalente a  $g$ .

Se  $f$  é  $r$ - $C^l$ - $\mathcal{K}$ -determinado para algum  $r < \infty$ , então  $f$  é  $C^l$ - $\mathcal{K}$ -finitamente determinado ou  $C^l$ - $\mathcal{K}$ -finito e  $r$  (o menor possível) é o grau de determinação de  $f$ .

Quando  $l = \infty$ , dizemos apenas que  $f$  é  $\mathcal{K}$ -finitamente determinado.

**Proposição 1.6.** (Mather [36]) Seja  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$ , com  $n \leq m$ . São equivalentes:

- a)  $f$  é  $\mathcal{K}$ -finitamente determinado;
- b)  $f$  é  $\mathcal{C}$ -finitamente determinado;
- c)  $\dim_{\mathbb{R}} Q(f) < \infty$ .

As definições seguintes são de J.C. Tougeron [45]. Se  $V_r \subset J^r(n, p)$  são conjuntos algébricos, com  $V_{r+1} \subset \pi^{-1}V_r$ , o conjunto  $V$  dos germes de aplicações  $f$  tais que  $j^r f(0) \in V_r$ , para todo  $r$  é chamado de *pró-algébrico*. A codimensão de  $V_r$  é menor ou igual à codimensão de  $V_{r+1}$ . A codimensão de  $V$  é definida pelo limite das codimensões de  $V_r$  quando  $r \rightarrow \infty$ . Dizemos que uma propriedade  $\mathcal{P}$  dos germes de aplicações *acontece em geral* se  $\mathcal{P}$  acontece exceto para um conjunto pró-algébrico de codimensão infinita.

Suponha  $V$  pró-algébrico. Então, a codimensão de  $V$  é infinita se, e somente se, para todo  $z \in J^r(n, m)$ , existe  $f \notin V$  tal que  $j^r f(0) = z$ .

O próximo teorema é devido a Mather e Tougeron (ver [45], [46]). O teorema pode também ser encontrado em [6] e [47].

**Teorema 1.7.** *A propriedade de  $\mathcal{K}$ -determinação finita acontece em geral para germes  $f \in \mathcal{E}_{n,m}$ .*

O resultado seguinte apresenta um invariante conhecido para a  $\mathcal{K}$ -equivalência.

**Teorema 1.8.** *(Mather [37]) Sejam  $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$  germes  $\mathcal{K}$ -finitamente determinados. Então,  $f$  é  $\mathcal{K}$ -equivalente a  $g$  se, e somente se, as  $\mathbb{R}$ -álgebras locais  $Q(f)$  e  $Q(g)$  são isomorfas.*

A proposição e o corolário abaixo apresentam caracterizações da  $\mathcal{K}$ -equivalência de Mather.

**Proposição 1.9.** *(Mather [36]) Sejam  $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$ . São equivalentes:*

- a)  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{C}$ -equivalentes;
- b) os ideais das funções coordenadas de  $f$  e  $g$  são iguais, isto é,

$$\langle f \rangle = \langle f_1, \dots, f_m \rangle = \langle g_1, \dots, g_m \rangle = \langle g \rangle;$$

- c) existe uma matriz inversível  $M$ ,  $m \times m$ , com coeficientes em  $\mathcal{E}_n$  tal que  $f = M \cdot g$ .

**Corolário 1.10.** *(Mather [36]) Sejam  $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$ . São equivalentes:*

- a)  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{K}$ -equivalentes;
- b) existe um germe de difeomorfismo  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  tal que  $f$  e  $g \circ h$  são  $\mathcal{C}$ -equivalentes;
- c) os ideais das funções coordenadas de  $f$  e  $g \circ h$  são iguais, isto é,

$$\langle f \rangle = \langle f_1, \dots, f_m \rangle = \langle (g_1 \circ h), \dots, (g_m \circ h) \rangle = \langle g \circ h \rangle;$$

d) existe uma matriz inversível  $M$ ,  $m \times m$ , com coeficientes em  $\mathcal{E}_n$  tal que  $f = M \cdot g \circ h$ .

A  $C^0$ - $\mathcal{G}$ -determinação finita foi estudada por vários autores, e o artigo de Wall [47] contém uma descrição dos principais resultados.

**Definição 1.11.** Dizemos que  $f$  satisfaz a uma condição de Lojasiewicz, se existem constantes positivas  $c$  e  $\alpha$  tais que  $\|f(x)\| \geq c\|x\|^\alpha$ , numa vizinhança da origem.

**Teorema 1.12.** (Wall [47]) Seja  $f \in \mathcal{E}_{n,m}$ , com  $n \leq m$ . São equivalentes

- a)  $f$  satisfaz a uma condição de Lojasiewicz;
- b)  $f$  é  $C^0$ - $\mathcal{C}$ -finitamente determinado;
- c)  $f$  é  $C^0$ - $\mathcal{H}$ -finitamente determinado.

Existem caracterizações análogas para a  $C^0$ - $\mathcal{H}$ -equivalência quando  $n > m$ , que não serão utilizadas neste trabalho, mas que podem ser encontradas em [47].

## 1.2 Transversalidade

Sejam  $N, P$  variedades suaves,  $f : N \rightarrow P$  uma aplicação suave e  $Q$  uma subvariedade de  $P$ . Denotaremos por  $d_x f : T_x N \rightarrow T_y P$  a aplicação diferencial de  $f$  em  $x \in N$  tal que  $f(x) = y$ . Então,  $f$  é transversal a  $Q$  se, e somente se,

$$d_x f(T_x N) + T_y Q = T_y P.$$

para todo  $x \in N$  tal que  $f(x) = y \in Q$ .

**Proposição 1.13.** Sejam  $N, P$  variedades suaves,  $f : N \rightarrow P$  uma aplicação suave e  $Q$  uma subvariedade de  $P$ . Se  $f$  é transversal a  $Q$  e  $\dim Q + \dim N < \dim P$ , então  $f(N) \cap Q = \emptyset$ .

Sejam  $N, B, P$  variedades suaves e  $\Theta : N \times B \rightarrow P$  uma aplicação suave. Para  $b \in B$ , indicamos por  $\Theta_b : N \rightarrow P$  a aplicação definida por  $\Theta_b(x) = \Theta(x, b)$ . Sejam  $Q \subset P$  uma subvariedade suave e  $T_w \subset B$  o conjunto dos pontos  $b$  tais que  $\Theta_b$  seja transversal a  $Q$ .

**Lema 1.14.** Se  $\Theta : N \times B \rightarrow P$  é transversal a  $Q \subset P$ , então  $T_w$  é residual em  $B$ .

Seja  $f : N \rightarrow P$  uma aplicação suave. Para cada  $k \in \mathbb{N}$  definimos  $J^k f : N \rightarrow J^k(N, P)$  uma aplicação suave que a cada  $x \in N$  associa  $J^k f(x)$ , o  $k$ -jato de  $f$  em  $x$ .

**Teorema 1.15.** (*Teorema de Transversalidade de Thom*) Sejam  $N, P$  variedades suaves e  $Q$  uma subvariedade de  $J^k(N, P)$ . Então, o conjunto de aplicações suaves  $f \in C^\infty(N, P)$  tais que  $J^k f$  é transversal a  $Q$  forma um subconjunto residual de  $C^\infty(N, P)$ . Se  $Q$  é fechado, o conjunto é aberto.

**Corolário 1.16.** Sejam  $N, P$  variedades suaves e  $Q$  uma subvariedade de  $P$ . Então, o conjunto de aplicações suaves de  $N$  em  $P$  que são transversais a  $Q$  é denso em  $C^\infty(N, P)$ . Se  $Q$  é fechado, o conjunto é aberto.

### 1.3 Conjuntos algébricos e semialgébricos

**Definição 1.17.** Um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  é algébrico se existem funções polinomiais  $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, k$  tais que  $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_1(x) = \dots = f_k(x) = 0\}$ .

Como nossos objetos são reais, poderíamos simplesmente dizer que  $X$  é algébrico se existe uma função polinomial  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$ . Basta considerar  $f = f_1^2 + \dots + f_k^2$ .

**Exemplo 1.18.** A esfera padrão unitária  $S^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$  é um conjunto algébrico. De fato, considerando  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1$ , claramente  $f^{-1}(0) = S^{n-1}$ .

**Proposição 1.19.** Sejam  $X, Y$  conjuntos algébricos em  $\mathbb{R}^n$ . Então,  $X \cup Y$  e  $X \cap Y$  são conjuntos algébricos.

**Proposição 1.20.** Sejam  $Y \subset \mathbb{R}^m$  um conjunto algébrico e  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma aplicação polinomial. Então,  $F^{-1}(Y) \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto algébrico.

A imagem de um conjunto algébrico por uma aplicação polinomial nem sempre é um conjunto algébrico. Observemos o contra-exemplo a seguir.

**Exemplo 1.21.** Considere o círculo padrão unitário  $S^1$  em  $\mathbb{R}^2$  e  $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a projeção canônica  $\pi(x, y) = x$ . Pelo Exemplo 1.18,  $S^1$  é um conjunto algébrico, mas  $\pi(S^1) = [-1, 1]$  não é algébrico.

Este contra-exemplo motiva a definição de uma classe mais geral que a dos conjuntos algébricos, a saber a classe dos conjuntos semialgébricos.

**Definição 1.22.** Um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  é semialgébrico básico se existem funções polinomiais  $f, g_1, \dots, g_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\} \cap \left( \bigcap_{i=1}^k \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) > 0\} \right).$$

Um conjunto semialgébrico é a reunião finita de conjuntos semialgébricos básicos. Logo, se  $X \subset \mathbb{R}^n$  é semialgébrico, existem funções polinomiais  $f_i, g_{ij}$  definidas em  $\mathbb{R}^n$ , tais que

$$X = \bigcup_{i=1}^k \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) = 0\} \cap \left( \bigcap_{j=1}^{s_i} \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_{ij}(x) > 0\} \right).$$

### Observações.

- Os conjuntos algébricos são, claramente, conjuntos semialgébricos.
- O conjunto  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  é semialgébrico, mas não é algébrico.
- Em  $\mathbb{R}$ , um conjunto semialgébrico é a reunião finita de intervalos abertos, fechados, semi-abertos e pontos.
- Se  $X, Y \subset \mathbb{R}^n$  são conjuntos semialgébricos, então  $X \cup Y, X - Y, \mathbb{R}^n - X, \mathbb{R}^n - Y$  e  $X \cap Y$  são também semialgébricos.
- Se  $X \subset \mathbb{R}^n$  e  $Y \subset \mathbb{R}^m$  são conjuntos semialgébricos, então  $X \times Y \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  é um conjunto semialgébrico.

**Proposição 1.23.** Se  $X \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto semialgébrico, então o fecho de  $X$ , denotado por  $\bar{X}$ , é um conjunto semialgébrico.

**Definição 1.24.** Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Dizemos que a função  $F: X \rightarrow \mathbb{R}$  é semialgébrica se o gráfico de  $F$ ,  $\text{graf}(F) = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} \mid y = F(x)\}$ , é um conjunto semialgébrico.

A proposição a seguir decorre de um teorema estrutural para conjuntos semialgébricos (ver Teorema da Decomposição Cilíndrica [3]).

**Proposição 1.25.** *Se  $X \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto semialgébrico, então  $X$  tem um número finito de componentes conexas e cada uma destas componentes é ainda um conjunto semialgébrico.*

**Teorema 1.26.** (Tarski-Seidenberg [3]) *A imagem de um conjunto semialgébrico  $X \subset \mathbb{R}^n$  por uma projeção  $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  é um conjunto semialgébrico.*

**Corolário 1.27.** *A imagem de um conjunto semialgébrico por uma aplicação polinomial é um conjunto semialgébrico.*

## 1.4 Conjuntos analíticos, semianalíticos e subanalíticos

As informações que introduzimos para conjuntos semialgébricos podem ser estabelecidas para outros conjuntos, num sentido bem mais geral, como é o caso dos conjuntos semianalíticos e subanalíticos.

**Definição 1.28.** *Um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  é analítico se para todo  $x \in X$ , existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  em  $\mathbb{R}^n$  e uma função analítica  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $X \cap U = f^{-1}(0)$ .*

Todo conjunto algébrico é analítico, porém nem todo conjunto analítico é algébrico. Por exemplo,  $f^{-1}(0)$  onde  $f(x, y) = y - \ln(x)$ .

**Definição 1.29.** *Um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  é semianalítico básico se para todo  $x \in X$ , existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  em  $\mathbb{R}^n$  e funções analíticas  $f, g_1, \dots, g_k: U \rightarrow \mathbb{R}$ , tais que*

$$X \cap U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\} \cap \left( \bigcap_{i=1}^k \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) > 0\} \right).$$

**Definição 1.30.** *Um conjunto semianalítico é uma reunião finita de conjuntos semianalíticos básicos.*

A semelhança que existe entre a definição de conjunto semianalítico e a definição dada na Seção 1.1 para conjunto semialgébrico, justifica o fato de que muitos resultados válidos para os conjuntos semialgébricos também valham para os conjuntos semianalíticos, mesmo estes últimos tendo uma definição de caráter local. Porém, nem todos resultados são válidos como, por exemplo, o Teorema 1.26 de Tarski-Seidenberg. Isto nos motiva a definição de uma categoria muito mais geral que semianalíticos, a saber, os conjuntos subanalíticos.

**Definição 1.31.** Um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^m$  é subanalítico se existe um conjunto  $\tilde{X} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq m$ , semianalítico, tal que a projeção  $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  restrita a  $\tilde{X}$  é uma aplicação própria e  $X = \pi(\tilde{X})$ .

Com esta definição o Teorema de Tarski-Seidenberg torna-se verdadeiro.

Podemos citar como propriedades dos conjuntos subanalíticos:

- a) Todo conjunto semianalítico é subanalítico.
- b) Se  $X, Y$  são conjuntos subanalíticos então  $X \cup Y$ ,  $\mathbb{R}^n - X$  (Teorema de Gabrielov [21]),  $\mathbb{R}^n - Y$  (Teorema de Gabrielov [21]),  $X \cap Y$  e  $X - Y$  são também subanalíticos.
- c) Se  $X \subset \mathbb{R}$  é um conjunto subanalítico, então  $X$  é reunião finita de intervalos abertos, fechados, semiabertos e pontos.

A classe de conjuntos subanalíticos satisfaz ao resultado seguinte, conhecido por *Lema da Seleção da Curva*, enunciado e provado por Milnor [38], para a categoria de conjuntos semi-algébricos.

**Teorema 1.32.** (*Lema de Seleção da Curva* [13]) Seja  $A$  um subconjunto subanalítico em  $\mathbb{R}^n$  e  $b \in \bar{A}$ . Então, existe uma curva analítica  $\gamma: [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\gamma(0) = b$  e  $\gamma(t) \in A$ , para todo  $t > 0$ .

# Índices em variedades singulares

Neste capítulo apresentamos os principais resultados conhecidos para o índice de um campo vetorial sobre uma variedade suave. Em seguida, apresentamos resultados sobre índices para campos vetoriais e 1-formas em variedades com singularidades isoladas, estudados por W. Ebeling e S. M. Gusein-Zade em [18]. Estas definições de índices satisfazem a um resultado tipo Poincaré-Hopf e, quando a variedade é suave coincidem com o conceito clássico de índice.

## 2.1 Índice de campos vetoriais em variedades suaves

Seja  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  um germe suave tal que 0 é isolado em  $f^{-1}(0)$ . Então, o índice  $\text{Ind}_0 f$  de  $f$  em 0 é definido como segue: escolhemos uma bola fechada  $B_r$  de centro zero e raio  $r$  em  $\mathbb{R}^n$  tal que  $f^{-1}(0) \cap B_r = 0$ , e seja  $S_r$  o bordo de  $B_r$ . Então, o índice de  $f$  em 0 é o grau da aplicação

$$\frac{f}{\|f\|} : S_r \longrightarrow S^{n-1}.$$

Este índice independe da escolha do raio da bola fechada  $B_r$ , e também pode ser definido como a soma de sinais do jacobiano de  $f$  em todos os pontos da imagem inversa de um valor regular de  $f$  perto de zero.

Sejam  $M$  uma variedade suave de dimensão  $n$  e  $TM$  o fibrado tangente de  $M$ . Seja  $X : M \longrightarrow TM$  um campo vetorial com uma singularidade isolada em  $x_0$ . Se  $h : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$  é um sistema de coordenadas locais de  $M$  no ponto  $x_0$  tal que  $h(x_0) = 0$ , então, o índice do campo vetorial  $X$  em  $x_0$  é definido como o índice do germe

$$dh \circ X \circ h^{-1} : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0),$$

em zero. Este índice independe do sistema de coordenadas locais escolhido.

Algumas propriedades do índice para campos vetoriais e germes serão enunciadas nos seguintes teoremas.

O resultado abaixo mostra que o índice de um germe independe de homotopias. Sejam  $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  germes suaves tais que 0 é isolado em  $f^{-1}(0)$  e  $g^{-1}(0)$ .

**Teorema 2.1.** *Seja  $H : \mathbb{R}^n \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$  uma homotopia tal que  $H(x, 0) = f(x)$  e  $H(x, 1) = g(x)$ . Se existe uma vizinhança  $B$  de 0 tal que para todo  $x \in B - \{0\}$  e  $t \in [0, 1]$ ,  $H(x, t) \neq 0$ , então  $ind_0 f = ind_0 g$ .*

Outro resultado que será usado em várias partes deste trabalho é o seguinte teorema. Sejam  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  um germe suave tal que 0 é isolado em  $f^{-1}(0)$  e  $F : \mathbb{R}^n \times (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação suave tal que  $F(x, 0) = f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Para cada  $t \in (-1, 1)$ , indicamos por  $f_t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  a aplicação definida por  $f_t(x) = F(x, t)$ .

**Teorema 2.2.** *Seja  $t$  suficientemente próximo do zero. Então,*

$$ind_0 f = \sum_{x \in f_t^{-1}(0)} Ind_x f_t.$$

O teorema a seguir mostra que o índice de um germe pode ser definido em termos algébricos. A assinatura de uma forma bilinear simétrica é definida como a soma de sinais das entradas de qualquer matrix diagonal que representa a forma bilinear simétrica.

**Teorema 2.3.** *(Eisenbud-Levine [20]) Seja  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  um germe finito, e seja  $J_0 \in Q(f)$  a classe residual do jacobiano de  $f$ . Se  $\varphi : Q(f) \longrightarrow \mathbb{R}$  é um funcional linear tal que  $\varphi(J_0) > 0$ , e  $\langle, \rangle$  é uma forma bilinear simétrica em  $Q(f)$  definida por  $\langle p, q \rangle = \varphi(pq)$ . Então,*

$$ind_0 f = \text{assinatura de } \langle, \rangle.$$

Como uma consequência do Teorema 2.3 temos:

**Corolário 2.4.** *(Eisenbud-Levine [20]) Sejam  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  um germe finito, e  $I$  um ideal de  $Q(f)$  maximal com respeito à propriedade  $I^2 = 0$ . Então,*

$$|ind_0 f| = \dim_{\mathbb{R}} Q(f) - 2 \dim_{\mathbb{R}} I.$$

**Teorema 2.5.** (Eisenbud-Levine [20]) *Seja  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  um germe finito, isto é, existe um inteiro positivo  $k$  tal que  $m_n^k \subset (f)$ . Se  $g : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  é uma aplicação suave tal que  $j^s f(0) = j^s g(0)$ , onde  $s \geq k$ , então  $\text{ind}_0 f = \text{ind}_0 g$ .*

Dada  $N \in GL(n, \mathbb{R})$ , denotamos por  $\text{sign}[N] = \frac{\det[N]}{|\det[N]|}$ . O teorema a seguir mostra que os índices de dois germes que são  $\mathcal{H}$ -equivalentes ou são iguais ou diferem por um sinal.

**Teorema 2.6.** *Suponha que os germes  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{H}$ -equivalentes, isto é, existem um germe suave  $M : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow GL(n, \mathbb{R})$  e um germe de difeomorfismo  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  tais que  $f = M \cdot g \circ h$ . Então,*

$$\text{ind}_0 f = \text{sign}[M(0)] \cdot \text{ind}_0 g \cdot \text{sign}[d_0 h].$$

Como veremos no teorema a seguir, o valor absoluto do índice é um invariante completo para a  $C^0$ - $\mathcal{H}$ -equivalência.

**Teorema 2.7.** (Nishimura [39]) *Sejam  $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  germes  $C^0$ - $\mathcal{H}$ -finitamente determinados e  $n \neq 4$ . Então,*

$$f \text{ e } g \text{ são } C^0\text{-}\mathcal{H}\text{-equivalentes se, e somente se, } |\text{ind}_0 f| = |\text{ind}_0 g|.$$

O próximo teorema mostra que para germes de aplicações que são  $C^0$ - $\mathcal{H}$ -finitamente determinados, o índice de  $f$  em zero coincide com o índice de algum  $r$ -jato de  $f$ . A demonstração segue facilmente do Teorema de Nishimura e do Teorema 1.12.

**Teorema 2.8.** *Seja  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  um germe de classe  $C^\infty$ . Se  $f$  satisfaz a uma condição de Lojasiewicz, isto é, se existem constantes positivas  $c$  e  $\alpha$  tais que  $\|f(x)\| \geq c\|x\|^\alpha$ , numa vizinhança da origem, então  $f^{-1}(0) = 0$  e existe  $r$  inteiro positivo tal que  $\text{ind}_0 f = \text{ind}_0 j^r f$ .*

Seja  $M$  uma subvariedade suave orientada, compacta e sem bordo de  $\mathbb{R}^n$ , indicaremos por  $\chi(M)$  a característica de Euler de  $M$  e por  $\text{Ind}_{x_0} X$  o índice do campo vetorial  $X$  em  $x_0$ .

**Teorema 2.9.** (Teorema de Poincaré-Hopf) *Seja  $X$  um campo vetorial em  $M$ , com um número finito de singularidades  $x_1, \dots, x_m$ . Então,*

$$\chi(M) = \sum_i^m \text{Ind}_{x_i} X.$$

## 2.2 Índice de campos vetoriais em variedades singulares

Nesta seção introduzimos uma definição do índice de um campo vetorial sobre uma variedade com singularidades isoladas e mostraremos que com esta definição, o teorema de Poincaré-Hopf continua verdadeiro.

Uma variedade com singularidades isoladas é um espaço topológico  $M \subset \mathbb{R}^m$ , que é uma variedade suave fora de um subconjunto discreto  $S \subset M$ . O subconjunto  $S$  é chamado de conjunto singular de  $M$ .

**Exemplo 2.10.** *Seja  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave definida por  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ . O conjunto  $M = f^{-1}(0)$  define uma variedade singular e  $S = \{0\}$  é o conjunto singular de  $M$ .*

Um difeomorfismo entre duas variedades com singularidades isoladas  $M_1$  e  $M_2$  é um homeomorfismo  $h : M_1 \rightarrow M_2$  tal que  $h(S_1) = S_2$  e  $h|_{M-S_1}$  é um difeomorfismo.

Sejam  $M \subset \mathbb{R}^m$  uma variedade com singularidades isoladas e  $S$  o conjunto singular de  $M$ .

**Definição 2.11.** *Dizemos que um ponto singular  $x \in S$  é de tipo cone se existe uma vizinhança de  $x$  em  $M$  difeomorfa ao cone sobre uma variedade suave  $W_x$ .*

A variedade suave  $W_x$  é chamada de link do ponto  $x \in S$ . Denotaremos o cone sobre a variedade suave  $W_x$  por  $CW_x = (I \times W_x)/(\{0\} \times W_x)$ , onde  $I = [0, 1]$ .

**Definição 2.12.** *Uma aplicação contínua  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  é um campo vetorial em  $M$ , se  $X|_{M-S}$  é um campo vetorial tangente a  $M - S$  e  $X(x) = 0$  para todo  $x \in S$ .*

Seja  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  um campo vetorial em  $M$ . Indicaremos por  $S_X = S \cup \{x \in M \mid X|_{M-S}(x) = 0\}$ , o conjunto de pontos singulares do campo  $X$ . A propriedade do ponto  $p$  ser de tipo cone garante que existe um campo vetorial radial definido em uma vizinhança do ponto  $p$ .

**Lema 2.13.** *Suponha que  $p$  é um ponto singular de tipo cone de  $M$ . Então, existe um campo vetorial radial  $X_{rad}$  definido em uma vizinhança do ponto  $p$  em  $M$ .*

**Demonstração:** Suponha que  $p$  é um ponto singular de tipo cone de  $M$ . Pela Definição 2.12, existe um difeomorfismo  $h : U \rightarrow CW_p$ , onde  $U$  é uma vizinhança do ponto  $p$  em  $M$ . Considere o campo vetorial  $Y : I \times W_p \rightarrow T(I \times W_p)$  definido por  $Y(t, x) = (1, 0_x)$ , onde  $0_x$  é o vetor nulo de  $T_x(W_p)$ . Portanto, o campo vetorial radial é dado por  $X_{rad} = dh|_{U-\{p\}}^{-1} \circ Y \circ h|_{U-\{p\}}$ . ■

Existem diversos trabalhos recentes que apresentam definições distintas para o índice de um campo vetorial em uma variedade singular, por exemplo [2], [26] e [41]. A definição que daremos a seguir é devida a W. Ebeling e S. M. Gusein-Zade em [18], e usa o conceito de campo radial introduzido por M.H. Schwartz em [42], [43] e [44].

Sejam  $X : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$  um campo vetorial em  $M$  e  $p \in S$  uma singularidade isolada do campo  $X$  do tipo cone. Então, existe uma vizinhança  $U$  de  $p$  de  $M$  tal que  $X$  não tem singularidades em  $U - \{p\}$ . Do Lema 2.13, existe um campo radial  $X_{rad}$  definido em um aberto  $V \subset U$  do ponto  $p$  em  $M$ . Usando partição da unidade em  $U - \{p\}$ , podemos obter um campo vetorial  $\tilde{X}$  em  $U - \{p\}$  tal que  $\tilde{X} = X$  em uma vizinhança perto do bordo de  $U$  e  $\tilde{X}|_V = X_{rad}$ .

**Definição 2.14.** ([18]) *Seja  $p$  uma singularidade isolada de  $X$ . Então, o índice do campo vetorial  $X$  em  $p$  é definido por*

$$ind_p X = 1 + \sum_{q \in S_{\tilde{X}} - \{p\}} ind_q \tilde{X}.$$

Este índice independe da escolha do cone e do campo vetorial  $\tilde{X}$  (ver [18]). Um resultado tipo Poincaré-Hopf é dado na proposição abaixo.

**Proposição 2.15.** ([18]) *Sejam  $M$  uma variedade com singularidades isoladas compacta e sem bordo e  $X$  um campo vetorial sobre  $M$ , com um número finito de pontos singulares  $x_1, \dots, x_r$ . Então,*

$$\chi(M) = \sum_i^r Ind_{x_i} X.$$

**Definição 2.16.** *Dizemos que um ponto singular de tipo cone  $p \in S$  é suavizável se  $W_p$  é o bordo de uma variedade suave compacta.*

Sejam  $X : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$  um campo vetorial em  $M$  e  $p \in S$  uma singularidade isolada suavizável do campo  $X$ . Então, existem uma vizinhança  $U$  de  $p$  em  $M$  e uma variedade compacta  $\tilde{V}_p$  tais que  $U$  é difeomorfo a  $CW_p$ ,  $X$  não tem pontos singulares em  $U - \{p\}$  e  $\partial \tilde{V}_p = W_p$ . Podemos supor que  $U = CW_p$ .

Identificando a variedade  $W_p$  com  $W_p \times \{\frac{1}{2}\}$  obtemos a variedade suave  $\tilde{V}_p \cup_{W_p} (W_p \times [\frac{1}{2}, 1])$ . Usando partição da unidade em  $\tilde{V}_p \cup_{W_p} (W_p \times [\frac{1}{2}, 1])$ , podemos obter um campo vetorial  $\tilde{X}$  em  $\tilde{V}_p \cup_{W_p} (W_p \times [\frac{1}{2}, 1])$  tal que  $\tilde{X} = X$  em  $W_p \times [\frac{1}{2}, 1]$ .

**Proposição 2.17.** ([18]) *Seja  $p$  uma singularidade isolada suavizável de  $X$ . Então,*

$$\text{ind}_p X = \sum_{q \in S_{\tilde{X}}} \text{ind}_q \tilde{X} - \chi(\tilde{V}_p) + 1.$$

## 2.3 Índice de 1-formas diferenciais em variedades singulares

Sejam  $M$  uma subvariedade suave de  $\mathbb{R}^m$  de dimensão  $n$ , e  $\omega = \sum_i^m a_i dx_i$  uma 1-forma em  $\mathbb{R}^m$ , onde  $a_i$  são funções suaves definidas em  $\mathbb{R}^m$  e  $\{dx_1, \dots, dx_m\}$  é a base dual associada à base canônica de  $\mathbb{R}^m$ . Indicaremos por  $\omega|_M$  a 1-forma induzida por  $\omega$  em  $M$  pela aplicação inclusão de  $M$  em  $\mathbb{R}^m$ .

De modo análogo à definição de índice de um campo vetorial em variedades suaves, podemos definir índice para 1-formas. Seja  $p$  um zero isolado da 1-forma  $\omega|_M$ , isto é,  $\omega|_M(p) = 0$  e existe uma vizinhança  $U$  de  $p$  em  $M$  tal que  $\omega|_M(x) \neq 0$  para todo  $x \in U - \{p\}$ . Seja  $h^{-1} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  um sistema de coordenadas locais de  $M$  no ponto  $p$  tal que  $h^{-1}(p) = 0$ . Assim,  $h^*(\omega|_M)$  o pull-back da forma  $\omega|_M$  por meio de  $h$ , define uma 1-forma em  $\mathbb{R}^n$ . Seja  $h^*(\omega|_M) = \sum_i^n a_i dx_i$ . Então, o índice  $i_p(\omega|_M)$  de  $\omega|_M$  em  $p$  é definido como o índice do germe

$$(a_1, \dots, a_n) : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0),$$

em zero. Este índice independe do sistema de coordenadas locais escolhido.

**Teorema 2.18.** *Sejam  $M$  uma variedade suave compacta, orientada, sem bordo e  $\omega|_M$  uma 1-forma, com um número finito de zeros  $x_1, \dots, x_r$ . Então,*

$$\chi(M) = \sum_i^r i_{x_i}(\omega|_M).$$

De modo análogo à definição de índice de campos vetoriais em variedades com singularidades isoladas, podemos definir um índice para 1-formas em variedades com singularidades isoladas. Esta definição foi introduzida por W. Ebeling e S. M. Gusein-Zade em [19].

Sejam  $\omega|_M$  uma 1-forma  $M$  e  $p \in S$  uma singularidade isolada de  $\omega|_M$  do tipo cone. Então, existe uma vizinhança  $U$  de  $p$  em  $M$  tal que  $\omega|_M$  não tem singularidades em  $U - \{p\}$ . De modo

análogo ao Lema 2.13, podemos encontrar uma 1-forma radial  $\omega_{rad}$  definida em um aberto  $V \subset U$  do ponto  $p$  em  $M$ . Usando uma partição da unidade em  $V - \{p\}$ , podemos obter uma 1-forma  $\tilde{\omega}$  em  $V - \{p\}$  tal que  $\tilde{\omega} = \omega|_M$  em uma vizinhança perto do bordo de  $U$  e  $\tilde{\omega} = \omega_{rad}$  em  $V$ .

**Definição 2.19.** ([19]) *Seja  $p$  uma singularidade isolada de  $\omega|_M$ . Então, o índice de  $\omega|_M$  em  $p$  é definido por*

$$i_p(\omega|_M) = 1 + \sum_{q \in S_{\tilde{\omega}} - \{p\}} i_q \tilde{\omega}.$$

Este índice independe da escolha do cone e da 1-forma  $\tilde{\omega}$  (ver [19]). Um resultado tipo Poincaré-Hopf é dado na proposição abaixo.

**Proposição 2.20.** ([19]) *Sejam  $M$  uma variedade com singularidades isoladas, compacta, e sem bordo e  $\omega|_M$  uma 1-forma, com um número finito de pontos singulares  $x_1, \dots, x_r$ . Então,*

$$\chi(M) = \sum_i^r i_{x_i}(\omega|_M).$$

Seja  $\omega|_M$  uma 1-forma em  $M$  e  $p \in S$  uma singularidade isolada suavizável de  $\omega|_M$ . Então, existem uma vizinhança  $U$  de  $p$  em  $M$ , e uma variedade compacta  $\tilde{V}_p$  tais que  $U$  é difeomorfa a  $CW_p$ ,  $\omega|_M$  não tem pontos singulares em  $U - \{p\}$  e  $\partial\tilde{V}_p = W_p$ . Podemos supor que  $U = CW_p$ .

Identificando a variedade  $W_p$  com  $W_p \times \{\frac{1}{2}\}$  obtemos a variedade suave  $\tilde{V}_p \cup_{W_p} (W_p \times [\frac{1}{2}, 1])$ . Usando partição da unidade, podemos obter uma 1-forma  $\tilde{\omega}$  em  $\tilde{V}_p \cup_{W_p} (W_p \times [\frac{1}{2}, 1])$  tal que  $\tilde{\omega} = \omega|_M$  em  $W_p \times [\frac{1}{2}, 1]$ .

**Proposição 2.21.** ([19]) *Seja  $p$  uma singularidade isolada suavizável de  $\omega|_M$ . Então,*

$$i_p(\omega|_M) = \sum_{q \in S_{\tilde{\omega}}} i_q(\tilde{\omega}) - \chi(\tilde{V}_p) + 1.$$

Seja  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função analítica real tal que  $f(0) = 0$  e  $0$  é uma singularidade isolada em  $M = f^{-1}(0)$ . Então, o conjunto  $M$  define uma variedade com singularidade isolada  $S = \{0\}$ . Sejam  $\omega = \sum_i^n a_i dx_i$  uma 1-forma em  $\mathbb{R}^n$ ,  $\omega|_M$  a 1-forma induzida por  $\omega$  em  $M$  pela aplicação inclusão de  $M$  em  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Sigma$  o conjunto de todos os valores críticos de  $f$  e  $V_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = \varepsilon\}$ .

**Proposição 2.22.** ([19]) *Seja 0 uma singularidade isolada de  $\omega|_M$  e  $\varepsilon \notin \Sigma$ . Então,*

$$i_0(\omega|_M) = \sum_{q \in V_\varepsilon} i_q(\omega|_{V_\varepsilon}) - \chi(V_\varepsilon) + 1.$$

Seja  $M \subset \mathbb{R}^n$  uma variedade com singularidades isoladas e  $X$  um campo vetorial em  $M$  que é a restrição de um campo vetorial analítico real  $Y = (a_1, \dots, a_n)$  definido em  $\mathbb{R}^n$ . Seja a 1-forma  $\omega = \sum_i^n a_i dx_i$  definida em  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposição 2.23.** ([19]) *Seja 0 uma singularidade isolada do campo vetorial  $X$  em  $M$ . Então,*  
 $i_0(\omega|_M) = \text{ind}_0 X$ .

## *Equações diferenciais implícitas*

O objetivo deste capítulo é apresentar resultados conhecidos de equações diferenciais implícitas (EDI's) que serão utilizados no trabalho. Inicialmente descrevemos os pontos singulares destas equações e mostramos que tais singularidades podem ser estudadas através do contato da 1-forma  $\omega = dx - pdy$  com o criminante da EDI. Em seguida, apresentamos as formas normais de uma equação diferencial implícita em torno de pontos singulares genéricos. Na seção 3.3 descrevemos um invariante diferenciável para uma EDI introduzido por J. W. Bruce e F. Tari em [9]. As principais referências para este capítulo são [1], [7], [8], [9], [14], [15] e [16].

### 3.1 Pontos singulares

Uma equação diferencial implícita (EDI) é uma equação da forma

$$F(x, y, p) = 0 \tag{3.1}$$

onde  $p = \frac{dy}{dx}$  e  $F$  é uma função suave em  $(x, y, p) \in \mathbb{R}^3$ . Uma curva integral de (3.1) é uma curva suave

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

tal que  $\beta(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \frac{\alpha_2'(t)}{\alpha_1'(t)})$  é uma solução de Equação (3.1), isto é,  $F(\beta(t)) = 0$ .

Se  $F_p$  é diferente de zero em um ponto  $(x_0, y_0, p_0)$  da Equação (3.1), segue do Teorema da Função Implícita que a Equação (3.1) se reduz, numa vizinhança do ponto  $(x_0, y_0)$ , a uma

equação diferencial ordinária da forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x, y).$$

Assim, para cada valor de  $p_0$  tal que  $F(x_0, y_0, p_0) = 0$  e  $F_p(x_0, y_0, p_0) \neq 0$  obtemos uma curva integral que passa pelo ponto  $(x_0, y_0)$ . Portanto, uma EDI pode ser pensada como uma superposição de equações diferenciais ordinárias e determinará geralmente várias curvas integrais por um ponto dado no plano.

Os pontos de uma equação diferencial implícita (3.1) tais que  $F_p \neq 0$  são estudados com as ferramentas das equações diferenciais ordinárias. Assim, no estudo de uma EDI (3.1), os pontos de interesse são aqueles para os quais a EDI (3.1) não se reduz localmente a uma EDO. Tais pontos correspondem aos zeros das equações  $F = F_p = 0$ . Como o estudo destes pontos é de caráter local, é suficiente estudar a função  $F$  em uma vizinhança de um ponto fixado. Denotamos por  $(F, q)$  o germe de  $F$  em  $q$  tal que  $F(q) = 0$ .

Pelo teorema de Sard, genericamente, a Equação (3.1) determina uma superfície suave. Então, podemos supor nesta seção que  $0$  é valor regular de  $F$ . Assim,  $M = F^{-1}(0)$  é uma superfície suave dada pela Equação (3.1). Seja  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a aplicação projeção definida por  $\pi(x, y, p) = (x, y)$ . Considere  $\pi|_M : M \rightarrow \mathbb{R}^2$  a aplicação  $\pi$  restrita a  $M$ .

**Definição 3.1.** Um ponto  $(x_0, y_0, p_0)$  da superfície suave  $M$  é chamado ponto singular da equação diferencial implícita (3.1), se é um ponto crítico da aplicação  $\pi|_M$ .

Geometricamente, os pontos singulares correspondem a pontos da superfície suave  $M$  tais que o plano tangente de  $M$  no ponto é perpendicular ao plano  $\mathbb{R}^2 \times 0$ . Escolhendo sistemas de coordenadas locais de  $M$  em pontos singulares da EDI, obtemos que os pontos singulares são soluções das equações  $F = F_p = 0$ .

O conjunto  $C$  dos pontos críticos da função  $\pi|_M$  é chamado de *criminante* e corresponde a zeros da aplicação  $C_F = (F, F_p) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . A aplicação  $C_F$  é chamada a aplicação criminante. Genericamente, o conjunto de zeros de  $C_F$  forma uma curva suave.

**Definição 3.2.** A imagem do criminante pela aplicação  $\pi|_M$  é chamada curva discriminante da EDI.

Um resultado clássico de Whitney [48] estabelece que para um conjunto aberto e denso do espaço das funções de classe  $C^\infty$ ,  $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$  com a topologia de Whitney, os únicos pontos críticos da projeção  $\pi|_M$  são dobras e cúspides, onde  $M = F^{-1}(0)$ . As dobras correspondem a pontos tais que  $F_{pp} \neq 0$  e as cúspides a pontos tais que  $F_{pp} = 0$  e  $F_{ppp} \neq 0$ . Em um ponto de dobra, escolhendo sistemas de coordenadas locais de  $M$  e  $\mathbb{R}^2$ , a forma normal é  $(u, v^2)$  e em um ponto cúspide a forma normal é  $(u, v^3 + uv)$ .

Dois métodos são usualmente utilizados para o estudo das equações diferenciais implícitas, o método da transformação de Legendre [8] e o método do levantamento do campo de linhas a um campo de vetores no fibrado projetivo. Este último método, que será usado neste trabalho, consiste em desdobrar a EDI em uma simples EDO sobre um espaço mais complicado. Tal método é realizado pela aplicação  $\pi|_M$  desdobrando a EDI (3.1) em uma equação diferencial ordinária dada pelo campo vetorial

$$\xi = F_p \frac{\partial}{\partial x} + pF_p \frac{\partial}{\partial y} - (F_x + pF_y) \frac{\partial}{\partial p}$$

tangente a  $M$ .

Uma das propriedades deste campo vetorial é que a imagem pela aplicação  $\pi|_M$  das curvas integrais do campo  $\xi$  sobre  $M$ , corresponde a curvas integrais da EDI (3.1). Os zeros do campo  $\xi$  em  $M$  correspondem a um tipo especial de pontos singulares, que serão estudados nos próximos teoremas.

Seja  $\omega = dy - p dx$ , a 1-forma definida em  $\mathbb{R}^3$ , chamada 1-forma de contato. O estudo de uma EDI também pode ser feito estudando uma 1-forma de contato definida em  $M = F^{-1}(0)$ . Indicaremos por  $\omega|_M$  a 1-forma  $\omega$  induzida em  $M$  e por  $\xi|_M$  o campo vetorial  $\xi$  restrito a  $M$ .

**Teorema 3.3.** *Sejam  $M$  uma superfície suave e  $q_0 \in M$ . Então,  $q_0$  é um zero de  $\omega|_M$  se, e somente se,  $q_0$  é um zero do campo vetorial  $\xi|_M$ .*

**Demonstração:** Seja  $q_0 = (x_0, y_0, p_0)$  um zero de  $\omega|_M$ . Considere a transformação linear  $T_{q_0} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$T_{q_0}(u, v, w) = (F_x(q)u + F_y(q)v + F_p(q)w, v - p_0u).$$

Note que o núcleo da  $T_{q_0}$  é o espaço tangente de  $M$  em  $q_0$ . Então, o posto de  $T_{q_0}$  é 1. Portanto,  $F(q_0) = F_p(q_0) = (F_x + pF_y)(q_0) = 0$ .

Reciprocamente, seja  $q_0$  um zero do campo vetorial  $\xi|_M$ . Então,  $F(q_0) = (F_x + pF_y)(q_0) = F_p(q_0) = 0$ . Da hipótese que  $M$  é suave, segue que  $F_y(q_0) \neq 0$ . Logo, obtemos que  $(\nabla f)(q_0) = (-p_0F_y(q_0), F_y(q_0), 0)$ . Como  $(\nabla f)(q_0)$  é ortogonal a  $T_{q_0}M$ , temos que, para todo  $(u, v, w) \in T_{q_0}M$ ,  $-p_0u + v = 0$ . Portanto,  $q_0$  é um zero da  $\omega|_M$ . ■

**Definição 3.4.** Dizemos que  $(F, q_0)$  é equivalente a  $(G, q_1)$ , se existe um germe de difeomorfismo  $h : (\mathbb{R}^2, z_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, z_1)$  que leva curvas integrais de  $G$  em curvas integrais de  $F$ , onde  $q_0 = (z_0, p_0)$  e  $q_1 = (z_1, p_1)$ . Analogamente, dizemos que  $(F, q_0)$  é topologicamente (analiticamente, respectivamente) equivalente a  $(G, q_1)$ , se  $h$  é um germe de homeomorfismo (analítico real, respectivamente), que leva curvas integrais de  $G$  em curvas integrais de  $F$ .

**Definição 3.5.** Um ponto singular  $q_0$  da EDI é regular se a aplicação criminante  $C_F$  é regular no ponto  $q_0$  e  $\omega|_C(q_0) \neq 0$ .

Genericamente o criminante de uma EDI (3.1) é uma curva suave e os zeros da  $\omega|_C$  são isolados. Portanto, o conjunto de pontos singulares regulares é aberto e denso no criminante.

Pelo Teorema 3.3, os pontos singulares regulares não anulam o campo vetorial  $\xi|_M$ . O teorema a seguir caracteriza os pontos singulares não regulares.

**Teorema 3.6.** Seja  $q_0$  um ponto singular. Então,  $q_0$  é não regular se, e somente se,  $\omega|_C(q_0) = 0$  ou  $F_{pp}(q_0) = 0$ .

**Demonstração:** Seja  $q_0$  é um ponto não regular. Então, analisando a aplicação criminante  $C_F$  no ponto  $q_0$  temos:

- (i) Se aplicação criminante  $C_F$  é não regular em  $q_0$ , então  $F_{pp}(q_0) = 0$ .
- (ii) Se a aplicação criminante  $C_F$  é regular em  $q_0$ , então pela Definição 3.5,  $\omega|_C(q_0) \neq 0$ .

Para demonstrar a recíproca devemos supor que a aplicação criminante  $C_F$  em  $q_0$  é regular, pois caso contrário o ponto  $q_0$  obviamente seria não regular.

Reciprocamente, suponha que  $\omega|_C(q_0) = 0$ . Então,  $q_0$  é não regular. Agora suponha que  $F_{pp}(q_0) = 0$ . Então, o vetor  $(0, 0, 1)$  pertence ao espaço tangente de  $C$  em  $q_0$ , logo,  $\omega|_C(q_0) = 0$ . Portanto,  $q_0$  é não regular. ■

## 3.2 Formas normais de uma EDI

O Teorema a seguir, demonstrado por Lak Dara em [14], permite reduzir a EDI a uma forma normal, em torno de um ponto singular regular, por meio de germes de difeomorfismos locais no plano.

**Teorema 3.7.** *Seja  $q$  um ponto singular regular de  $F$ . Então,  $(F, q)$  é equivalente a  $(X - P^2, 0)$ .*

Como consequência deste teorema temos que: A família de curvas integrais de uma EDI, próximo de um ponto singular regular, é difeomorfa a uma família de parábolas semi-cúbicas dada pela equação  $y = x^{\frac{3}{2}} + c$ .

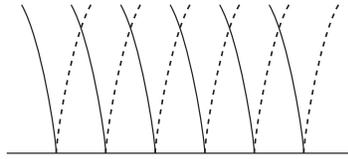


Figura 3.1: Curvas integrais numa vizinhança de um ponto singular regular.

O resultado acima caracteriza os pontos singulares regulares. Portanto, resta estudar os pontos singulares não regulares, que correspondem pelo Teorema 3.6, a zeros da 1-forma  $\omega|_C$  ou a zeros do campo vetorial  $(F, F_p, F_{pp})$ .

**Definição 3.8.** *Sejam  $(F, q)$  o germe de uma EDI e  $q$  um ponto singular de  $F$  que satisfaz às condições  $F_{pp}(q) = 0$  e  $F_{ppp}(q)F_x(q) \neq 0$ . Então:*

- (i) *Dizemos que  $q$  é uma cúspide elíptica se  $(F_x F_{py} - F_y F_{px})(q) > 0$ .*
- (ii) *Dizemos que  $q$  é uma cúspide hiperbólica se  $(F_x F_{py} - F_y F_{px})(q) < 0$ .*

Em [14], Lak Dara utiliza o teorema de Transversalidade de Thom para estudar os pontos singulares não regulares de uma EDI. O principal resultado deste estudo é o seguinte teorema. Seja  $C(\mathbb{R}^3)$  o conjunto das funções de  $\mathbb{R}^3$  em  $\mathbb{R}$  com a  $C^3$ -topologia de Whitney.

**Teorema 3.9.** *(L. Dara [14]) Existe um subconjunto denso e aberto  $\Lambda \subset C(\mathbb{R}^3)$  tal que se  $F \in \Lambda$ , então os pontos singulares não regulares de  $F$  são de cinco tipos. Os três primeiros correspondem a sela, nó ou foco do campo vetorial  $\xi|_M$ , e os dois últimos a uma cúspide elíptica ou hiperbólica.*

Com respeito às formas normais do subconjunto  $\Lambda \subset C(\mathbb{R}^3)$ , Lak Dara no artigo [14] conjecturou que:

- (i) Se  $q$  é um ponto singular não regular do tipo sela, nó ou foco do campo vetorial  $\xi|_M$ , então o germe  $(F, q)$  é equivalente respectivamente a  $(p^2 + y + \frac{\lambda}{4}x^2, 0)$ , para  $\lambda < 0$ ,  $0 < \lambda < \frac{1}{4}$ ,  $\lambda > \frac{1}{4}$ , correspondendo a sela, nó e foco.
- (ii) Se  $q$  é um ponto singular não regular do tipo cúspide elíptica, então o germe  $(F, q)$  é equivalente a  $(x - p^3 + yp, 0)$ .
- (iii) Se  $q$  é um ponto singular não regular do tipo cúspide hiperbólica, então o germe  $(F, q)$  é equivalente a  $(x - p^3 - yp, 0)$ .

Em [15], Davydov demonstrou que a conjectura é verdadeira no caso em que os pontos singulares não regulares são do tipo sela, nó ou foco do campo vetorial  $\xi|_M$ , e com respeito às cúspides elíptica e hiperbólica, afirmou que é falsa e provou que as formas normais, mesmo com relação a equivalência topológicas, têm módulo funcional.

**Teorema 3.10.** (Davydov [15]) *Seja  $q$  um ponto singular do tipo sela, nó ou foco do campo vetorial  $\xi|_M$ . Então, o germe  $(F, q)$  é equivalente a  $(p^2 + y + \frac{\lambda}{4}x^2, 0)$ , para  $\lambda < 0$ ,  $0 < \lambda < \frac{1}{4}$ ,  $\lambda > \frac{1}{4}$ , correspondendo a sela, nó e foco.*

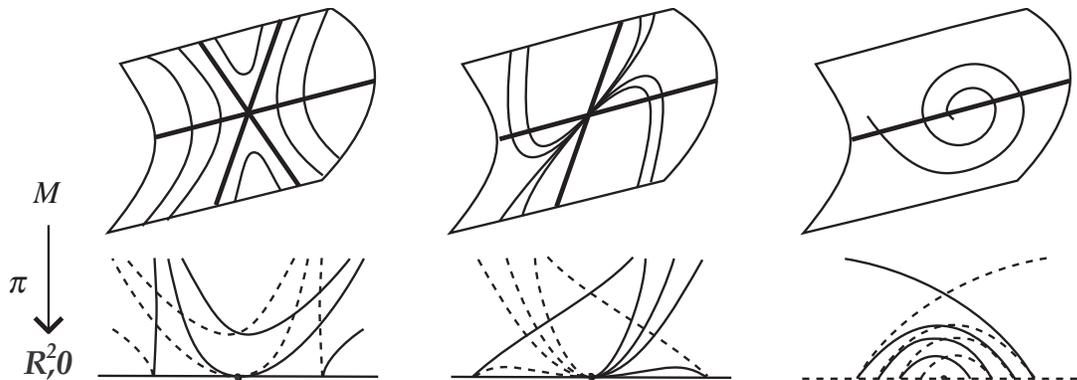


Figura 3.2: Pontos singulares não regulares de tipo sela, nó e foco, respectivamente.

Davydov em [15], também mostrou a equivalência topológica num ponto singular não regular do tipo sela, nó ou foco.

**Teorema 3.11.** *Seja  $q$  um ponto singular não regular do tipo sela, nó ou foco do campo vetorial  $\xi|_M$ . Então, o germe  $(F, q)$  é topologicamente equivalente a  $(p^2 + y - \frac{1}{2}x^2, 0)$ ,  $(p^2 + y + \frac{1}{18}x^2, 0)$  ou  $(p^2 + y + \frac{1}{8}x^2, 0)$ .*

Seja  $D$  o conjunto de EDI's tais que a aplicação  $\pi|_M$  é uma aplicação própria. O seguinte teorema demonstrado por A. A Davydov, Ishikawa, Izumiya e W. Z. Sun em [16], caracteriza os pontos singulares não regulares num subconjunto denso e aberto de  $D$ .

**Teorema 3.12.** *Existe um subconjunto denso e aberto  $\Sigma$  do espaço  $D$  tal que se  $F \in \Sigma$  e  $q$  é um ponto singular não regular de  $F$ , então o germe  $(F, q)$  é equivalente a  $(p^2 - y + kx^2, 0)$ ,  $(p^2 - x(x - y)^2, 0)$  ou  $(p\varphi(y, p) - x, 0)$ , onde  $\varphi(0, 0) = \varphi_p(0, 0) = 0$  e  $\varphi_y(0, 0)\varphi_{pp}(0, 0) \neq 0$ .*

### 3.3 Invariantes de EDI's

Em [9], J. W. Bruce e Farid Tari definem a multiplicidade  $M_{(F,0)}$  para um germe  $(F, 0)$  analítico de uma EDI como o número máximo de pontos singulares não regulares de perturbações genéricas da complexificação do germe  $(F, 0)$ .

Seja  $F : (\mathbb{K}^3, 0) \longrightarrow (\mathbb{K}^3, 0)$ , ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ),  $F = (F_1, F_2, F_3)$  um germe analítico quando  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou holomorfo quando  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Denotamos por  $m(F_1, F_2, F_3) = \dim_{\mathbb{K}} Q(F)$ .

O resultado abaixo, demonstrado por J. W. Bruce e Farid Tari em [9], permite expressar a multiplicidade em termos de dimensões de álgebras.

**Teorema 3.13.** *Seja  $(F, 0)$  um germe analítico tal que  $m(F, F_p, F_x + pF_y) < \infty$  e  $m(F, F_p, F_{pp}) < \infty$ . Então,  $M_{(F,0)} = m(F, F_p, F_x + pF_y) + m(F, F_p, F_{pp})$ .*

Determinar condições para que a multiplicidade seja finita e descrever o tamanho do conjunto das EDI's com multiplicidade finita são dois problemas de interesse. O teorema a seguir demonstrado por J. W. Bruce e Farid Tari em [9], responde a essas perguntas.

**Teorema 3.14.** *(a) A multiplicidade é finita se, somente se, os inteiros,  $m(F, F_p, F_x + pF_y)$  e  $m(F, F_p, F_{pp})$  são finitos.*

*(b) O conjunto das EDI's de multiplicidade infinita é de codimensão infinita no espaço das EDI's.*

*A condição (b) é equivalente a dizer que a propriedade da multiplicidade finita acontece em geral.*

Sejam  $F$  e  $G$  equações diferenciais implícitas. Sejam  $M = F^{-1}(0)$  e  $N = G^{-1}(0)$ .

**Teorema 3.15.** *Sejam  $M$  e  $N$  variedades suaves e  $q_0$  um zero isolado dos campos vetoriais  $(F, F_p, F_x + pF_y)$  e  $(G, G_p, G_{pp})$ . Se  $(F, q_0)$  e  $(G, q_1)$  são equivalentes, então  $\text{ind}_{q_0} \xi|_M = \text{ind}_{q_1} \xi|_N$ , onde  $\xi = F_p \frac{\partial}{\partial x} + pF_p \frac{\partial}{\partial y} - (F_x + pF_y) \frac{\partial}{\partial p}$ .*

**Demonstração:** Suponha que  $(F, q_0)$  e  $(G, q_1)$  são equivalentes, onde  $q_0 = (z_0, p_0)$  e  $q_1 = (z_1, p_1)$ . Então, existe um germe de difeomorfismo  $h = (h_1, h_2) : (\mathbb{R}^2, z_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, z_1)$  que leva curvas integrais de  $F$  em curvas integrais de  $G$ , isto é, se  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}^2$  é uma curva suave tal que  $F(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \frac{\alpha_2'(t)}{\alpha_1'(t)}) = 0$ , então  $G((h_1 \circ \alpha)(t), (h_2 \circ \alpha)(t), \frac{(h_1 \circ \alpha)'(t)}{(h_2 \circ \alpha)'(t)}) = 0$ .

Agora, considere  $H : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $H(x, y, p) = (h_1(x, y), h_2(x, y), \frac{h_{2x}(x, y) + ph_{2y}(x, y)}{h_{1x}(x, y) + ph_{1y}(x, y)})$ . É fácil ver que  $H$  é um difeomorfismo. Se  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}^2$  é uma curva suave, então

$$H(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \frac{\alpha_2'(t)}{\alpha_1'(t)}) = ((h_1 \circ \alpha)(t), (h_2 \circ \alpha)(t), \frac{(h_1 \circ \alpha)'(t)}{(h_2 \circ \alpha)'(t)}),$$

o qual mostra que  $H|_M : M \longrightarrow N$ .

Da hipótese que  $q_0$  é um zero isolado do campo vetorial  $(F, F_p, F_{pp})$ , segue que as curvas integrais do campo  $\xi|_M$  em  $M$  são da forma  $\beta(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \frac{\alpha_2'(t)}{\alpha_1'(t)})$ , logo,  $H|_M$  leva curvas integrais do campo vetorial  $\xi|_M$  em curvas integrais do campo vetorial  $\xi|_N$ . Portanto,  $\text{ind}_{q_0} \xi|_M = \text{ind}_{q_1} \xi|_N$ .

## *Equações diferenciais binárias*

Neste capítulo introduzimos o conceito de ponto singular de uma equação diferencial binária e apresentamos algumas propriedades destes pontos como, por exemplo, o Teorema 4.8. Na seção 4.2, introduzimos uma relação de equivalência no conjunto de todas as EDB's e a noção de perturbações boas de EDB's. Em seguida, apresentamos alguns invariantes conhecidos de EDB's.

### 4.1 Pontos singulares de EDB's

Uma equação diferencial binária (EDB) é da forma

$$E(x, y)[dx, dy] = a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 = 0 \quad (4.1)$$

onde  $a, b, c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  são funções suaves. A função  $\delta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\delta = b^2 - ac$  é denominada função discriminante e o conjunto  $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \delta(x, y) = 0\}$  é chamado *discriminante*. Uma curva integral da equação diferencial binária (4.1) é uma curva suave  $\alpha : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $E(\alpha(t))[\alpha'(t)] = 0$ . Uma equação diferencial binária é positiva se  $\delta \geq 0$  e  $\delta(x, y) = 0$  se, e somente se,  $a(x, y) = b(x, y) = c(x, y) = 0$ . As singularidades de equações diferenciais positivas são estudadas em [5], [28], [29] e [30].

**Exemplo 4.1.** *As linhas de curvatura de uma superfície em  $\mathbb{R}^3$  em torno de um ponto umbílico determinam uma equação diferencial binária positiva*

$$(gF - fG)dy^2 + (gE - eG)dxdy + (fE - eF)dx^2 = 0$$

onde  $e, f, g$  e  $E, F, G$  são os coeficientes da segunda e primeira formas fundamentais da superfície, As singularidades desta equação foram estudadas em [28], [29] e [30]. respectivamente.

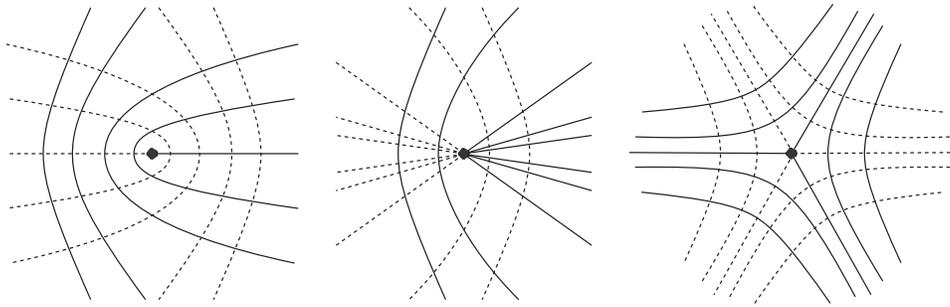


Figura 4.1: Linhas de curvatura numa vizinhança de pontos umbilicos.

**Exemplo 4.2.** As linhas assintóticas de uma superfície em  $\mathbb{R}^3$  determinam uma equação diferencial binária não necessariamente positiva

$$edy^2 + 2fdxdy + gdx^2 = 0,$$

onde  $e, f, g$  são os coeficientes da segunda forma fundamental da superfície. As singularidades desta equação são estudadas em [22], [23] e [24].

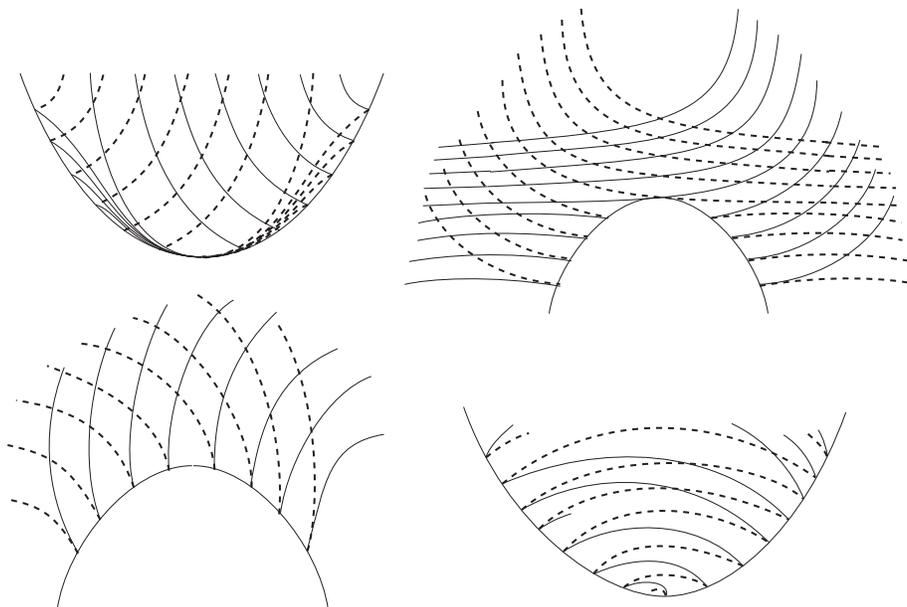


Figura 4.2: Linhas assintóticas numa vizinhança de pontos parabólicos.

Quando a equação diferencial binária (4.1) é dada pelas linhas de curvatura de uma superfície em  $\mathbb{R}^3$ , os pontos singulares correspondem a pontos umbílicos da superfície dada. De maneira geral, se a EDB (4.1) é positiva então os pontos singulares correspondem a pontos do plano tais que o ponto e todas as direções através do ponto são soluções da Equação (4.1). Equivalentemente,  $z_0$  é um ponto singular se, e somente se,  $a(z_0) = b(z_0) = c(z_0) = 0$ .

Neste trabalho generalizaremos esta definição para EDB's arbitrárias.

**Definição 4.3.** Dizemos que  $z_0 \in \mathbb{R}^2$  é um ponto singular de  $E$  se  $E(z_0)[\delta_y(z_0), -\delta_x(z_0)] = 0$  e  $\delta(z_0) = 0$ .

Usando a Equação (4.1), temos que se  $z_0$  é um ponto singular de  $E$  então

$$(b^2 - ac)(z_0) = 0 \quad \text{e} \quad [\delta_x(a\delta_x - b\delta_y) + \delta_y(c\delta_y - b\delta_x)](z_0) = 0.$$

É fácil verificar que os pontos umbílicos de uma superfície em  $\mathbb{R}^3$  correspondem a pontos singulares da EDB dada pelas linhas de curvatura.

A seguir mostraremos algumas propriedades dos pontos singulares de EDB's.

Multiplicando a equação diferencial binária (4.1) por  $a(x, y)$  e  $c(x, y)$ , temos:

Se  $z_0$  é um ponto singular de  $E$ , então  $z_0$  é um zero dos campos vetoriais  $(\delta, a\delta_x - b\delta_y)$  e  $(\delta, c\delta_y - b\delta_x)$ . A recíproca nem sempre é verdadeira, mas supondo algumas condições obtemos os seguintes lemas.

**Lema 4.4.** Seja  $z_0$  um zero do campo vetorial  $(\delta, a\delta_x - b\delta_y)$ . Então:

- (i) Se  $z_0$  é um zero não degenerado do campo vetorial  $(\delta, a\delta_x - b\delta_y)$  e um ponto singular de  $E$ , então  $a(z_0) \neq 0$  e  $\delta_y(z_0) \neq 0$ .
- (ii) Se  $a(z_0) \neq 0$ , então  $z_0$  é um ponto singular de  $E$ .

**Demonstração:** (i) Seja  $z_0$  um ponto singular de  $E$ . Vamos mostrar que  $a(z_0) \neq 0$ . De fato, suponha, por absurdo, que  $a(z_0) = 0$ . Então,  $b(z_0) = 0$ . Pela definição de ponto singular,  $c(z_0) = 0$  ou  $\delta_y(z_0) = 0$ . Suponha que  $c(z_0) = 0$ . Nesse caso, substituindo o ponto  $z_0$  nas equações

$$\delta_x = 2bb_x - a_xc - ac_x \quad \text{e} \quad \delta_y = 2bb_y - a_yc - ac_y, \quad (4.2)$$

temos que  $\delta_x(z_0) = \delta_y(z_0) = 0$ . Calculando o determinante da diferencial do campo vetorial  $W = (\delta, a\delta_x - b\delta_y)$  em  $(x, y)$  obtemos:

$$\det[d_{(x,y)}W] = [\delta_x(a_y\delta_x + a\delta_{xy} - b_y\delta_y - b\delta_{yy}) - \delta_y(a_x\delta_x + a\delta_{xx} - b_x\delta_y - b\delta_{yx})](x, y). \quad (4.3)$$

Usando a Equação (4.3), temos que  $\det[d_{z_0}W] = 0$ , o que é um absurdo. Suponha agora que  $\delta_y(z_0) = 0$  e  $c(z_0) \neq 0$ . Então, pela Equação (4.2),  $a_y(z_0) = 0$ . Usando a Equação (4.3), temos que  $\det[d_{z_0}W] = 0$ , o que é um absurdo. Portanto,  $a(z_0) \neq 0$ .

Vamos agora mostrar que  $\delta_y(z_0) \neq 0$ . De fato, suponha, por absurdo, que  $\delta_y(z_0) = 0$ . Neste caso, segue da hipótese que  $\delta_x(z_0) = 0$ . Logo, pela equação (4.3), temos que  $\det[d_{z_0}W] = 0$ , o que é um absurdo.

(ii) Suponha que  $a(z_0) \neq 0$ . Então, multiplicando a EDB (4.1) por  $a(x, y)$  obtemos:

$$a(x, y)(E(x, y)[\delta_y(x, y), -\delta_x(x, y)]) = [(a\delta_x - b\delta_y)^2 - \delta\delta_y^2](x, y). \quad (4.4)$$

Portanto, pela Equação (4.4) e o fato de que  $z_0$  é um zero do campo vetorial  $(\delta, a\delta_x - b\delta_y)$ , temos que  $z_0$  é um ponto singular de  $E$ . ■

**Lema 4.5.** *Seja  $z_0$  um zero do campo vetorial  $(\delta, b\delta_x - c\delta_y)$ . Então:*

(i) *Se  $z_0$  é um zero não degenerado do campo vetorial  $(\delta, b\delta_x - c\delta_y)$  e um ponto singular de  $E$ , então  $c(z_0) \neq 0$  e  $\delta_x(z_0) \neq 0$ .*

(ii) *Se  $c(z_0) \neq 0$ , então  $z_0$  é um ponto singular de  $E$ .*

**Demonstração:** A demonstração é análoga à do Lema 4.4. ■

Uma EDB (4.1) pode ser pensada como uma equação diferencial implícita. De fato, se  $dx \neq 0$ , obtemos:

$$F(x, y, p) = a(x, y)p^2 + 2b(x, y)p + c(x, y), \quad (4.5)$$

uma EDI, onde  $p = \frac{dy}{dx}$ . Se  $dy \neq 0$ , obtemos:

$$G(x, y, q) = c(x, y)q^2 + 2b(x, y)q + a(x, y), \quad (4.6)$$

uma EDI, onde  $q = \frac{dx}{dy}$ . Os conjuntos de zeros das Equações (4.5) e (4.6) podem definir variedades singulares. Neste trabalho, vamos supor que o conjunto  $M = F^{-1}(0)$  é uma variedade com singularidades isoladas. O campo vetorial

$$\xi = F_p \frac{\partial}{\partial x} + pF_p \frac{\partial}{\partial y} - (F_x + pF_y) \frac{\partial}{\partial p}$$

definido em  $\mathbb{R}^3$ , induz um campo vetorial  $\xi|_M$  em  $M$  dado pela restrição de  $\xi$  em  $M$ . É fácil ver que o campo vetorial  $\xi|_M$  é tangente a  $M$  em pontos suaves e se anula em pontos singulares de  $M$ . Genericamente, os zeros do campo vetorial  $\xi|_M$  correspondem a pontos hiperbólicos.

A seguir mostraremos que os pontos singulares da EDB (4.1), que são zeros não degenerados do campo vetorial  $(\delta, a\delta_x - b\delta_y)$ , correspondem a pontos hiperbólicos do campo vetorial  $\xi|_M$ . A demonstração deste resultado será dada no Teorema 4.8, usando os Lemas 4.6 e 4.7. Multiplicando a Equação (4.5) por  $a(x, y)$  obtemos

$$a(x, y)F(x, y, p) = \left[ \frac{1}{4}F_p^2 - \delta \right](x, y, p), \quad (4.7)$$

onde  $F_p(x, y, p) = 2a(x, y)p + 2b(x, y)$ . Seja  $(z_0, p_0)$  um ponto singular da EDI (4.5), isto é,  $F(z_0, p_0) = F_p(z_0, p_0) = 0$ . Então, usando a Equação (4.7), obtemos:

$$a(z_0)(F_x + pF_y)(z_0, p_0) = -\delta_x(z_0) - p_0\delta_y(z_0). \quad (4.8)$$

**Lema 4.6.** *Seja  $z_0$  um zero não degenerado do campo vetorial  $W = (\delta, a\delta_x - b\delta_y)$ . Então,  $q_0 = (z_0, p_0)$  é um zero do campo vetorial  $\xi|_M$  se, e somente se,  $z_0$  é um ponto singular de  $E$  e  $p_0 = -\frac{b(z_0)}{a(z_0)}$ .*

**Demonstração:** Seja  $q_0$  um zero do campo  $\xi|_M$ . Vamos provar que  $a(z_0) \neq 0$ . De fato, suponha, por absurdo, que  $a(z_0) = 0$ . Então, pela hipótese,  $a(z_0) = b(z_0) = c(z_0) = 0$ . De (4.2),  $\delta_x(z_0) = \delta_y(z_0) = 0$ . Logo, pela Equação (4.3),  $\det[d_{z_0}W] = 0$ , o que é absurdo.

Portanto,  $a(z_0) \neq 0$  e pelo Lema 4.4 e a hipótese, temos que  $z_0$  é um ponto singular de  $E$  e  $p_0 = -\frac{b(z_0)}{a(z_0)}$ . Reciprocamente, suponha que  $z_0$  é um ponto singular de  $E$  e  $p_0 = -\frac{b(z_0)}{a(z_0)}$ . Então, pelas Equações (4.7) e (4.8),  $q_0$  é um zero do campo vetorial  $\xi|_M$ . ■

**Lema 4.7.** *Seja  $z_0 = (x_0, y_0)$  um zero não degenerado do campo vetorial  $W = (\delta, a\delta_x - b\delta_y)$ . Se  $z_0$  é um ponto singular de  $E$ , então  $q_0 = (x_0, y_0, p_0)$  é um ponto regular de  $M$  e um zero não degenerado do campo vetorial  $\xi|_M$ , onde  $p_0 = -\frac{b(z_0)}{a(z_0)}$ .*

**Demonstração:** Vamos provar que  $q_0$  é um ponto regular de  $M$ . Pelo Lema 4.4,  $a(z_0) \neq 0$  e  $\delta_y(z_0) \neq 0$ . Seja  $p_0 = -\frac{b(z_0)}{a(z_0)}$ . Então,  $F_p(q_0) = 0$ . Logo, pela Equação (4.7) e da hipótese temos que,  $F(q_0) = 0$  e  $F_y(q_0) = \delta_y(z_0) \neq 0$ , portanto,  $q_0$  é um ponto regular de  $M$ . Vamos agora provar que  $q_0$  é um zero não degenerado do campo vetorial  $\xi|_M$ . Pelo Lema 4.6,  $q_0$  é um zero do campo vetorial  $\xi|_M$ . Como  $F_y(q_0) \neq 0$ , pelo Teorema da Função Implícita, existe uma função suave  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $F(x, \varphi(x, p), p) = 0$  e  $\varphi(x_0, p_0) = y_0$ , onde  $U$  é uma vizinhança do ponto  $(x_0, p_0)$  em  $\mathbb{R}^2$ . Definimos  $h : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  por  $h(x, p) = (x, \varphi(x, p), p)$ . Esta aplicação define uma carta local suave da superfície  $M$  no ponto  $(x_0, p_0)$ . Assim, a representação local do campo vetorial  $\xi|_M$  na carta  $h$  é dada por

$$(dh^{-1} \circ \xi|_M \circ h)(x, p) = (F_p \circ h, -F_x \circ h - pF_y \circ h)(x, p).$$

Logo, calculando a matriz jacobiana de  $g(x, p) = (F_p \circ h, -F_x \circ h - pF_y \circ h)(x, p)$  em  $(x_0, p_0)$ , usando as equações  $\varphi_x = -\frac{F_x \circ h}{F_y \circ h}$ ,  $\varphi_p = -\frac{F_p \circ h}{F_y \circ h}$  e  $\varphi_p(x_0, p_0) = 0$ , obtemos:

$$d_{(x_0, p_0)}g = \begin{pmatrix} [F_{px} - F_{py} \cdot \frac{F_x}{F_y}](q_0) & F_{pp}(q_0) \\ [-(F_x + pF_y)_x + (F_x + pF_y)_y \cdot \frac{F_x}{F_y}](q_0) & -(F_x + pF_y)_p(q_0) \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Por outro lado, calculando a matriz jacobiana do campo vetorial  $S = (F, F_p, F_x + pF_y)$  em  $q_0$  definido em  $\mathbb{R}^3$ , obtemos:

$$d_{q_0}S = \begin{pmatrix} F_x(q_0) & F_y(q_0) & 0 \\ F_{px}(q_0) & F_{py}(q_0) & F_{pp}(q_0) \\ (F_x + pF_y)_x(q_0) & (F_x + pF_y)_y(q_0) & (F_x + pF_y)_p(q_0) \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Multiplicando a segunda coluna da matriz (4.10) por  $-\frac{F_x(q_0)}{F_y(q_0)}$  e somando à primeira coluna desta

matriz, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 0 & F_y(q_0) & 0 \\ [F_{px} - F_{py} \cdot \frac{F_x}{F_y}](q_0) & F_{py}(q_0) & F_{pp}(q_0) \\ [(F_x + pF_y)_x - (F_x + pF_y)_y \cdot \frac{F_x}{F_y}](q_0) & (F_x + pF_y)_y(q_0) & (F_x + pF_y)_p(q_0) \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Então, pelas Equações (4.9) e (4.11),

$$\det[d_{q_0}S] = F_y(q_0) \cdot \det[d_{(x_0, p_0)}g]. \quad (4.12)$$

Por outro lado, usando a Equação (4.7) e o fato que  $p = \frac{F_p - 2b}{2a}$ , obtemos:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}F_p & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ L_1 & L_2 & -\frac{1}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_p \\ \delta \\ a\delta_x - b\delta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aF \\ F_p \\ a(F_x + pF_y) \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

onde  $L_1 = \frac{-a_x - pa_y}{4a}F_p + \frac{1}{2}(F_{px} + pF_{py}) - \frac{\delta_y}{2a}$  e  $L_2 = \frac{a_x + pa_y}{a}$ . Então, pelas Equações (4.12) e (4.13),

$$\begin{aligned} \det[d_{(x_0, p_0)}g] &= -2 \frac{1}{a(z_0)^2} \cdot \det[d_{z_0}W] \cdot \frac{1}{F_y(q_0)} \\ &= 2 \frac{1}{a(z_0)\delta_y(z_0)} \cdot \det[d_{z_0}W], \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde  $W = (\delta, a\delta_x - b\delta_y)$ . Portanto,  $q_0$  é um zero não degenerado do campo vetorial  $\xi|_M$ . ■

O resultado abaixo mostra que os pontos singulares de  $E$  que são zeros não degenerados do campo vetorial  $(\delta, a\delta_x - b\delta_y)$  correspondem a pontos hiperbólicos do campo vetorial  $\xi|_M$ .

**Teorema 4.8.** *Seja  $z_0$  um zero não degenerado do campo vetorial  $W = (\delta, a\delta_x - b\delta_y)$ . Se  $z_0$  é um ponto singular de  $E$ , então  $q_0 = (z_0, p_0)$  é um ponto singular hiperbólico do campo vetorial  $\xi|_M$ , onde  $p_0 = -\frac{b(z_0)}{a(z_0)}$ .*

**Demonstração:** Podemos supor, sem perda de generalidade, que  $z_0 = (0, 0)$ . Seja  $p_0 = -\frac{b(0,0)}{a(0,0)}$ . Então, pelo Lema 4.7,  $(0, 0, p_0)$  é um ponto regular de  $M$  e um zero não degenerado do campo vetorial  $\xi|_M$ . Como  $a(0, 0) \neq 0$ , existe um germe de difeomorfismo suave, (ver [9], proposição 3.2),  $h : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  dado por  $h(x, y) = (x, \phi(x, y))$  tal que  $\phi_y(0, 0) = 1$ ,  $\phi_x(0, 0) = p_0$  e

$F(x, \phi(x, y), \phi_x(x, y) + p\phi_y(x, y)) = G(x, y, p)$ , onde

$$G(x, y, p) = p^2 - \hat{\delta}(x, y) = 0. \quad (4.15)$$

É claro que  $F_y(0, 0, p_0) = G_y(0, 0, 0) = \hat{\delta}_y(0, 0) \neq 0$ . Daí,  $N = G^{-1}(0)$  é uma variedade suave numa vizinhança do ponto 0. Segue do Teorema 3.15 que  $\text{ind}_{(0,0,p_0)} \xi|_M = \text{ind}_0 \xi|_N$ . Pela Equação (4.9), a matriz jacobiana do campo vetorial  $\xi|_N$  com respeito a uma carta local é dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \hat{\delta}_{xx}(0, 0) & \hat{\delta}_y(0, 0) \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Como  $\hat{\delta}_y(0, 0) \neq 0$ , segue que a parte real dos autovalores da matriz acima são não nulas. Então, 0 é um ponto hiperbólico de  $\xi|_N$ . Portanto,  $(0, 0, p_0)$  é um ponto hiperbólico de  $\xi|_M$ . ■

## 4.2 Relações de equivalências de EDB's e formas normais

Denotamos por  $(E, z)$  um germe da EDB, onde  $E$  é uma EDB e  $z$  é um ponto singular de  $E$ . De maneira análoga à Definição 3.4, definimos a relação de equivalência de equações diferenciais binárias.

**Definição 4.9.** *Dois germes de equações diferenciais binárias  $(E_1, z_1)$  e  $(E_2, z_2)$ , dadas por*

$$\begin{aligned} E_1(x, y)(dx, dy) &= a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 = 0 \\ E_2(x, y)(dx, dy) &= A(x, y)dy^2 + 2B(x, y)dxdy + C(x, y)dx^2 = 0, \end{aligned}$$

*são equivalentes se existem um germe de função  $\rho : (\mathbb{R}^2, z_1) \rightarrow \mathbb{R}$  não nula em  $z_1$  e um germe de difeomorfismo  $h = (h_1, h_2) : (\mathbb{R}^2, z_1) \rightarrow (\mathbb{R}^2, z_2)$  tais que*

$$\begin{pmatrix} \xi & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho(a \circ h) & \rho(b \circ h) \\ \rho(b \circ h) & \rho(c \circ h) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

*onde  $h_{1x} = \alpha$ ,  $h_{1y} = \beta$ ,  $h_{2x} = \gamma$  e  $h_{2y} = \xi$  são as derivadas parciais de  $h$ .*

Uma propriedade importante desta relação de equivalência é que  $h$  leva curvas integrais de

$(E_2, z_2)$  em curvas integrais de  $(E_1, z_1)$ , e se consideramos  $z_1 = z_2 = 0$  obtemos que o conjunto de pares  $(\rho, h)$  forma um grupo  $\mathcal{G}$ , e a Equação (4.17) define uma ação de  $\mathcal{G}$  no espaço dos germes de EDB's.

Esta noção de equivalência foi generalizada por Bruce em [10], que define um grupo maior de equivalências, substituindo a matriz dada pelas derivadas parciais de  $h$  na Equação (4.17) por qualquer matriz invertível. Esta nova relação de equivalência determina o grupo  $\mathcal{R} \times \mathcal{H}$ , onde  $\mathcal{R}$  é o grupo de difeomorfismo na fonte e  $\mathcal{H}$  é o grupo das matrizes inversíveis. O grupo  $\mathcal{R} \times \mathcal{H}$  é um subgrupo geométrico da  $\mathcal{H}$ -equivalência de contato [17], e não leva necessariamente curvas integrais em curvas integrais, mas preserva propriedades da curva discriminante e do espaço  $M$ .

A classificação das EDB's com relação à equivalência dada na Definição 4.9, apresenta modalidade. Entretanto, é possível definir uma relação de equivalência mais fraca, que genericamente não apresente modalidade. Dizemos que dois germes de equações diferenciais binárias,  $(E_1, z_1)$  e  $(E_2, z_2)$ , são topologicamente equivalentes se existe um germe de homeomorfismo  $h : (\mathbb{R}^2, z_1) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, z_2)$  que leva curvas integrais de  $(E_1, z_1)$  em curvas integrais de  $(E_2, z_2)$ .

O próximo teorema mostra que, genericamente, a equivalência topológica de equações diferenciais binárias não apresenta modalidade, e que a classificação das EDB's genéricas coincide com a classificação das EDI's genéricas tais que  $F_{pp}(0) \neq 0$ . Indiquemos por  $B$  o espaço das EDB's em  $\mathbb{R}^2$ .

**Teorema 4.10.** *Existe um subconjunto  $\Theta$  denso e aberto de  $B$  tal que se  $E \in \Theta$  e  $z_0$  é um ponto singular de  $E$ , então  $(E, z_0)$  é topologicamente equivalente a  $(dy^2 + (y - \frac{1}{2}x^2)dx^2, 0)$ ,  $(dy^2 + (y + \frac{1}{18}x^2)dx^2, 0)$  ou  $(dy^2 + (y + \frac{1}{8}x^2)dx^2, 0)$ .*

**Demonstração:** A demonstração segue do Teorema 3.9. ■

Seja  $(E, 0)$  o germe da EDB dada pela Equação (4.1). Então, uma perturbação a 1-parâmetro

$$\begin{aligned} (\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}) : \mathbb{R}^2 \times (-\varepsilon, \varepsilon) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, t) &\longmapsto (\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c})(x, y, t) \end{aligned}$$

tal que  $\tilde{a}(x, y, 0) = a(x, y)$ ,  $\tilde{b}(x, y, 0) = b(x, y)$  e  $\tilde{c}(x, y, 0) = c(x, y)$ , determina uma perturbação a

1-parâmetro de  $(E, 0)$  no espaço das EDB's dada por

$$E_t = a_t dy^2 + b_t dx dy + c_t dx^2,$$

onde  $a_t(x, y) = \tilde{a}(x, y, t)$ ,  $b_t(x, y) = \tilde{b}(x, y, t)$  e  $c_t(x, y) = \tilde{c}(x, y, t)$ .

**Definição 4.11.** Dizemos que  $E_t$  é uma perturbação boa de  $E$ , se  $E_t \in \Theta$  para todo  $t$  perto do zero,  $t \neq 0$ .

Como consequência do Teorema 4.8, temos o seguinte resultado:

**Corolário 4.12.** Sejam  $E_t$  uma perturbação de  $E$  e  $\delta_t = b_t^2 - a_t c_t$ . Se  $0$  é um valor regular do campo vetorial  $(\delta_t, a_t \delta_{t,x} - b_t \delta_{t,y})$  para todo  $t$  perto do zero,  $t \neq 0$ , então  $E_t$  é uma perturbação boa de  $E$ .

Um estudo mais aprofundado das singularidades de uma equação diferencial binária pode ser feito em dois casos, o primeiro quando não todos os coeficientes são nulos em zero e o segundo, quando todos se anulam em zero. O teorema a seguir demonstrado por J. W. Bruce e F. Tari em [8], permite reduzir uma EDB a uma forma normal, por difeomorfismos suaves no plano, quando não todos os coeficientes são nulos no zero.

**Teorema 4.13.** Sejam  $a, b, c$  não todos nulos em zero. Então, o germe  $(E, 0)$  da EDB é analiticamente equivalente a  $(dy^2 \pm dx^2, 0)$ ,  $(dy^2 + x dx^2, 0)$ ,  $(dy^2 - y dx^2, 0)$  ou equivalente a  $(dy^2 - (y + \lambda x^2) dx^2, 0)$ .

Quando todos os coeficientes são nulos em zero, o seguinte teorema, demonstrado por J. W. Bruce e F. Tari em [7], dá uma condição necessária e suficiente para que o conjunto  $M = \{(x, y, [u, v]) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{RP}^1 \mid E(x, y)(u, v) = 0\}$ , seja uma superfície suave numa vizinhança de  $0 \times \mathbb{RP}^1$ .

**Teorema 4.14.** Suponha que  $a, b, c$  se anulem em zero. Então,  $M$  é uma superfície suave numa vizinhança de  $0 \times \mathbb{RP}^1$  se, e somente se, o discriminante tem uma singularidade de Morse no zero.

Se os coeficientes da Equação (4.5) são nulos em zero, então os zeros do campo vetorial  $\xi|_M$ , no conjunto  $0 \times \mathbb{R}$ , são dados pela equação

$$(F_x + pF_y)(0, 0, p) = (a_y p^3 + (a_x + 2b_y)p^2 + (2b_x + c_y)p + c_y)(0, 0, p) = 0.$$

Sejam  $\alpha_1(p) = (a_y p^2 + (b_y + a_x)p + b_x)(0, 0, p)$  e  $\phi(p) = (F_x + pF_y)(0, 0, p)$ .

**Teorema 4.15.** *Suponha que  $a, b, c$  se anularem em zero, o discriminante tem uma singularidade isolada de Morse no zero,  $\phi(p)$  não tem raízes repetidas e que  $\phi(p)$  e  $\alpha_1(p)$  não têm raízes comuns. Então, o germe  $(E, 0)$  da EDB é topologicamente equivalente a:*

(I) *Se o discriminante é um ponto isolado:*

(a)  $(ydy^2 + 2xdxdy - ydx^2, 0),$

(b)  $(ydy^2 - 2xdxdy - ydx^2, 0),$

(c)  $(ydy^2 + \frac{1}{2}xdxdy - ydx^2, 0),$

(II) *Se o discriminante é o cruzamento de duas curvas suaves:*

(d)  $(ydy^2 + 2xdxdy + ydx^2, 0),$

(e)  $(ydy^2 - \frac{1}{2}xdxdy + ydx^2, 0),$

(f)  $(ydy^2 - 4xdxdy + ydx^2, 0),$

(g)  $(ydy^2 + 2(y-x)dxdy + ydx^2, 0),$

(h)  $(ydy^2 - \frac{4}{3}xdxdy + ydx^2, 0).$

Os tipos de zeros do campo vetorial  $\xi|_M$  das três primeiras formas normais a, b e c correspondem a uma sela, três selas, e duas selas e um nó. Os pontos singulares destas três formas normais são chamados de lemon, star e monstar. No caso das outras formas normais d, e, f, g e h os tipos de zeros do campo vetorial  $\xi|_M$  correspondem a uma sela, um nó, três selas, duas selas e um nó, uma sela e dois nós.

Observe que os pontos singulares de uma EDB tais que  $a, b, c$  se anulam no zero, como por exemplo no Teorema 4.15, não são genéricas no espaço de todas as equações diferenciais binárias, pois a 1-forma do contato  $\omega = dy - pdx$  restrita ao discriminante se anula em todo  $0 \times \mathbb{R}$ .

### 4.3 Invariantes de equações diferenciais binárias

No caso das equações diferenciais binárias positivas (4.1), Hopf define em [32], um índice para uma singularidade isolada, em termos dos coeficientes da EDB. Tal índice é denotado por  $I(E, z_0)$ .

**Teorema 4.16.** *(H. Hopf [32]) Se  $z_0$  é um ponto singular isolado da Equação Diferencial Binária positiva (4.1), então  $I(E, z_0) = -\frac{1}{2}ind_{z_0}(a, b) = -\frac{1}{2}ind_{z_0}(b, c)$ .*

Este índice é um invariante topológico.

**Teorema 4.17.** *Suponha que  $z_1$  e  $z_2$  são singularidades isoladas das equações diferenciais binárias positivas  $(E_1, z_1)$  e  $(E_2, z_2)$ . Se  $(E_1, z_1)$  é topologicamente equivalente a  $(E_2, z_2)$ , então*

$$I(E_1, z_1) = I(E_2, z_2).$$

De maneira análoga a que descrevemos na seção 3.3, J. W. Bruce e Farid Tari em [9] introduzem a multiplicidade de um germe  $(E, 0)$  de uma equação diferencial binária com coeficientes analíticos reais, da seguinte forma: Seja  $(\bar{E}, 0)$  a complexificação do germe  $(E, 0)$ . Então, a multiplicidade é definida como o número máximo de pontos singulares de uma perturbação do germe  $(\bar{E}, z)$  no espaço das equações diferenciais complexas. Denotamos por  $M_{(E, z)}$  a multiplicidade do germe  $(E, z)$ .

O teorema a seguir, demonstrado por J. W. Bruce e Farid Tari em [9], permite expressar a multiplicidade em termos de dimensões de álgebras.

**Teorema 4.18.** *Sejam  $(E, 0)$  um germe de uma EDB e  $m(\delta, a\delta_x - b\delta_y) < \infty$ . Então,  $M_{(E, 0)} = m(\delta, a\delta_x - b\delta_y) - m(a, b)$ .*

O resultado abaixo, também demonstrado por J. W. Bruce e Farid Tari [9], mostra que a multiplicidade é um invariante por difeomorfismo.

**Teorema 4.19.** *Se  $(E_1, 0)$  é equivalente a  $(E_2, 0)$ , então  $M_{(E_1, 0)} = M_{(E_2, 0)}$ .*

# Perturbações de equações diferenciais binárias

Neste capítulo provamos a existência de *perturbações boas* para EDB's com coeficientes analíticos reais. Em seguida, mostramos a existência de perturbações para EDB's com coeficientes não necessariamente analíticos reais, as quais satisfazem algumas propriedades interessantes.

Começamos primeiro com uma observação ao Lema de Transversalidade de Thom (Lema 1.14). Seja  $\theta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma aplicação suave. Para  $p \in \mathbb{R}^k$ , indicamos por  $\theta_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  a aplicação definida por  $\theta_p(x) = \theta(x, p)$ . Assim, se 0 é valor regular de  $\theta$ , obtemos, usando o Lema de Transversalidade de Thom, que existe um subconjunto denso e aberto  $E$  de  $\mathbb{R}^k$  tal que, para todo  $p \in E$ , 0 é valor regular de  $\theta_p$ . Mas, se 0 é um valor regular da aplicação  $\theta|_Y : Y \rightarrow \mathbb{R}^m$ , a aplicação  $\theta$  restrita a  $Y$ , onde  $Y$  é uma subvariedade de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ , então uma pergunta natural é saber se ainda é verdadeiro o Lema de Transversalidade de Thom. O próximo lema responde a essa pergunta.

Sejam  $X$  um subconjunto fechado de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$  e  $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  a aplicação projeção definida por  $\pi(x, p) = p$ . Seja  $Y = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k - X$ .

**Teorema 5.1.** *Se  $\pi(X)$  tem medida nula e 0 é valor regular da aplicação  $\theta|_Y : Y \rightarrow \mathbb{R}^m$ , então existe um subconjunto de medida nula  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^k$  tal que, para todo  $p \in \mathbb{R}^k - \Omega$ , 0 é valor regular de  $\theta_p$ .*

**Demonstração:** Seja 0 valor regular da aplicação  $\theta|_Y : Y \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Então,  $Z = \theta|_Y^{-1}(0)$  é uma variedade suave e  $\dim Z = n - m + k$ . Considere  $\pi|_Z : Z \rightarrow \mathbb{R}^k$  a aplicação projeção restrita

a  $Z$ . Seja  $\Lambda$  o conjunto dos valores críticos da aplicação  $\pi|_Z$ . Como  $\pi(X)$  tem medida nula,  $\Omega = \pi(X) \cup \Lambda$  tem medida nula.

Vamos mostrar que para todo  $p_0 \in \mathbb{R}^k - \Omega$ , 0 é valor regular de  $\theta_{p_0}$ . De fato, fixado  $p_0 \in \mathbb{R}^k - \Omega$ , seja  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\theta_{p_0}(x_0) = 0$ . Então,  $\theta(x_0, p_0) = 0$ . Como  $p_0 \in \mathbb{R}^k - \Omega$ , temos que,  $q_0 = (x_0, p_0) \in Z$  e  $p_0$  é um valor regular da aplicação  $\pi|_Z$ , o que implica que a aplicação  $d_{q_0}(\pi|_Z) : T_{q_0}Z \rightarrow \mathbb{R}^k$  é sobrejetora. Além disso,  $d_{q_0}(\pi|_Z) = \pi$ . Seja  $\iota : \mathbb{R}^n \rightarrow Y$  definida por  $\iota(x) = (x, p_0)$ . Então,  $\theta_{p_0} = \theta \circ \iota$ . Daí,

$$d_{x_0}(\theta_{p_0})(\mathbb{R}^n) = d_{q_0}\theta \circ d_{x_0}\iota(\mathbb{R}^n) = d_{q_0}\theta(\mathbb{R}^n \times 0).$$

Seja  $\{e_1, \dots, e_k\}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^k$ . Então, como  $d_{q_0}(\pi|_Z)$  é sobrejetora, para cada  $i = 1, \dots, k$ , existem  $a_i \in \mathbb{R}^n$  tais que  $(a_i, e_i) \in T_{q_0}Z$ . Logo,  $(0, e_i) = (a_i, e_i) - (a_i, 0)$  pertence a  $\mathbb{R}^n \times 0 + T_{q_0}Z$ . Daí,  $\mathbb{R}^n \times 0 + T_{q_0}Z = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ . Pela igualdade,  $\ker[d_{q_0}\theta] = T_{q_0}Z$ , temos que

$$d_{q_0}\theta(\mathbb{R}^n \times 0) = d_{q_0}\theta(\mathbb{R}^n \times 0 + T_{q_0}Z) = d_{q_0}\theta(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k).$$

Como  $q_0$  é um ponto regular de  $\theta|_Y$ , temos que,  $d_{q_0}\theta(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k) = \mathbb{R}^m$ . Assim,  $d_{x_0}(\theta_{p_0})(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^m$ . Portanto, 0 é valor regular de  $\theta_{p_0}$ . ■

O teorema acima é fundamental para a demonstração da existência de perturbações boas, mas precisamos de mais resultados os quais serão dados pelos Lemas 5.2 e 5.3.

Considere  $\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^2)$  o conjunto de todos os polinômios de 2 variáveis com grau menor ou igual a  $k$ . Seja  $f : \mathbb{R}^2 \times \mathcal{P}_k^3(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma aplicação suave definida por

$$f(x, y, a_0, b_0, c_0) = (a + a_0, b + b_0, c + c_0)(x, y).$$

Não é difícil mostrar que 0 é valor regular de  $f$ .

**Lema 5.2.** *Sejam  $X = f^{-1}(0)$ ,  $Y = \mathcal{P}_k^3(\mathbb{R}^2) - X$  e  $\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathcal{P}_k^3(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^3$  a aplicação suave definida por*

$$\beta(x, y, a_0, b_0, c_0) = (a + a_0, b + b_0, \tilde{\delta}_y)(x, y),$$

onde  $\tilde{\delta} = (b + b_0)^2 - (a + a_0)(c + c_0)$ . Então, 0 é valor regular de  $\beta|_Y$ .

**Demonstração:** Seja  $q_0 = (z_0, a_0, b_0, c_0) \in \beta_{|Y}^{-1}(0)$ . Vamos mostrar que  $q_0$  é um ponto regular de  $\beta_{|Y}$ . De fato, como  $q_0 \notin X$ , segue que,  $(c + c_0)(z_0) \neq 0$ . Sejam  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 : [0, 1] \rightarrow Y$  caminhos suaves definidos por

$$\alpha_1(t) = q_0 + t(0, 0, 1, 0, 0), \quad \alpha_2(t) = q_0 + t(0, 0, 0, 1, 0) \quad \text{e} \quad \alpha_3(t) = q_0 + t(0, 0, y - y_0, 0, 0).$$

Calculando a diferencial de  $\beta_{|Y} \circ \alpha_i$ , para  $i \in \{1, 2, 3\}$ , em  $t = 0$ , obtemos que

$$d_{q_0}\beta_{|Y}(\alpha_1'(0)) = (1, 0, -(c + c_0)_y(z_0))$$

$$d_{q_0}\beta_{|Y}(\alpha_2'(0)) = (0, 1, 2(b + b_0)_y(z_0))$$

$$d_{q_0}\beta_{|Y}(\alpha_3'(0)) = (0, 0, -(c + c_0)(z_0)).$$

Assim,  $q_0$  é um ponto regular de  $\beta_{|Y}$ . Portanto,  $0$  é um valor regular de  $\beta_{|Y}$ . ■

Seja  $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathcal{P}_k^3(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^2$  a aplicação suave definida por

$$\Phi(x, y, a_0, b_0, c_0) = (\tilde{\delta}, (a + a_0)\tilde{\delta}_x - (b + b_0)\tilde{\delta}_y)(x, y),$$

onde  $\tilde{\delta} = (b + b_0)^2 - (a + a_0)(c + c_0)$ . Seja  $\Phi_{(a_0, b_0, c_0)}(x, y) = \Phi(x, y, a_0, b_0, c_0)$ .

**Lema 5.3.** *Existe um subconjunto de medida nula  $\Omega$  de  $\mathcal{P}_k^3(\mathbb{R}^2)$  tal que para todo  $p_0 = (a_0, b_0, c_0) \in \mathcal{P}_k^3(\mathbb{R}^2) - \Omega$ ,  $0$  é um valor regular de  $\Phi_{p_0}$ .*

**Demonstração:** Seja  $Z = \mathbb{R}^2 \times \mathcal{P}_k^3(\mathbb{R}^2) - F$ , onde  $F = \beta^{-1}(0)$  é um subconjunto fechado de  $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{P}_k^3(\mathbb{R}^2)$ . Seja  $\Phi_{|Z} : Z \rightarrow \mathbb{R}^2$  a aplicação  $\Phi$  restrita a  $Z$ .

Vamos provar que  $0$  é um valor regular de  $\Phi_{|Z}$ . De fato, seja  $q_0 = (z_0, p_0) \in \Phi_{|Z}^{-1}(0)$ . Então,  $(a + a_0)(z_0) = 0$  ou  $(a + a_0)(z_0) \neq 0$ . Suponha que  $(a + a_0)(z_0) = 0$ . Então,  $(b + b_0)(z_0) = 0$ . Como  $q_0 \notin F$ ,  $\tilde{\delta}_y(z_0) \neq 0$  e  $(c + c_0)(z_0) \neq 0$ . Sejam  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 : [0, 1] \rightarrow Y$  caminhos suaves definidos por

$$\alpha_1(t) = q_0 + t(0, 0, 1, 0, 0) \quad \text{e} \quad \alpha_2(t) = q_0 + t(0, 0, 0, 1, 0).$$

Calculando a diferencial de  $\Phi_{|Z} \circ \alpha_i$ , para  $i \in \{1, 2\}$ , em  $t = 0$ , obtemos que

$$d_{q_0}\Phi_{|Z}(\alpha_1'(0)) = (-(c + c_0), \tilde{\delta}_x)(z_0) \quad \text{e} \quad d_{q_0}\Phi_{|Z}(\alpha_2'(0)) = (0, -\tilde{\delta}_y)(z_0).$$

Assim,  $q_0$  é um ponto regular de  $\Phi|_Z$ . Suponha agora que  $(a + a_0)(z_0) \neq 0$ . Então, definimos  $\alpha_1, \alpha_2, : [0, 1] \rightarrow Y$  caminhos suaves por

$$\alpha_1(t) = q_0 + t(0, 0, 0, 0, 1) \quad \text{e} \quad \alpha_2(t) = q_0 + t(0, 0, 0, 0, x - x_0).$$

Calculando a diferencial de  $\Phi \circ \alpha_i$ , para  $i \in \{1, 2\}$ , em  $t = 0$  obtemos que

$$\begin{aligned} d_{q_0} \Phi(\alpha_1'(0)) &= (-(a + a_0), -(a + a_0)(a + a_0)_x + (b + b_0)(a + a_0)_y)(z_0) \\ d_{q_0} \Phi(\alpha_2'(0)) &= (0, -(a + a_0)^2)(z_0) \end{aligned}$$

Assim,  $q_0$  é um ponto regular de  $\Phi|_Z$ .

Agora vamos provar que  $\pi(F)$  tem medida nula. De fato, como 0 é valor regular de  $f$  e pelo Lema 5.2, temos que  $X = f^{-1}(0)$ ,  $\beta_Y^{-1}(0)$  são variedades suaves de  $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{P}_k^3(\mathbb{R}^2)$  e

$$\dim X < \dim \mathcal{P}_k^3(\mathbb{R}^2) \quad \text{e} \quad \dim \beta_Y^{-1}(0) < \dim \mathcal{P}_k^3(\mathbb{R}^2). \quad (5.1)$$

De (5.1), temos que  $\pi(\beta_Y^{-1}(0))$  e  $\pi(X)$  têm medida nula. Como  $F \subseteq \beta_Y^{-1}(0) \cup X$ , então  $\pi(F)$  tem medida nula.

Assim, 0 é valor regular de  $\Phi|_Z$  e  $\pi(F)$  tem medida nula. Portanto, pelo Teorema 5.1, existe um subconjunto de medida nula  $\Omega$  de  $\mathcal{P}_k^3(\mathbb{R}^2)$  tal que para todo  $p_0 \in \mathcal{P}_k^3(\mathbb{R}^2) - \Omega$ , 0 é valor regular de  $\Phi_{p_0}$ . ■

Seja  $(E, 0)$  um germe de uma EDB dada por

$$E(x, y)[dx, dy] = a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 = 0. \quad (5.2)$$

Lembramos que uma perturbação a 1-parâmetro  $E_t$  de  $(E, 0)$  é uma perturbação boa se  $E_t \in \Theta$  para todo  $t$  perto do zero,  $t \neq 0$ .

**Teorema 5.4.** *Se  $a, b$  e  $c$  são funções analíticas reais, então existe uma perturbação boa  $E_t$  de  $(E, 0)$ .*

**Demonstração:** Pelo Lema 5.3, existe um subconjunto de medida nula  $\Omega$  de  $\mathcal{P}_k^3(\mathbb{R}^2)$  tal que para todo  $p_0 \in \mathcal{P}_k^3(\mathbb{R}^2) - \Omega$ , 0 é valor regular de  $\Phi_{p_0}$ . Além disso, pela hipótese e pelo Teorema

5.1, temos que o subconjunto  $\Omega$  é subanalítico, pois é a projeção de um conjunto analítico.

Seja  $\Lambda = \mathcal{P}_k^3(\mathbb{R}^2) - \Omega$ . Então,  $\Lambda$  é um conjunto subanalítico e  $\bar{\Lambda} = \mathcal{P}_k^3(\mathbb{R}^2)$ . Como  $0 \in \bar{\Lambda}$ , então pelo Lema da seleção da curva 1.32, existe uma curva analítica real  $\alpha : [0, 1) \rightarrow \mathcal{P}_k^3(\mathbb{R}^2)$  tal que  $\alpha(0) = 0$  e  $\alpha(0, 1) \subseteq \Lambda$ . Seja  $(a_t, b_t, c_t) = (a, b, c) + \alpha(t)$ . Então,

$$E_t(x, y) = a_t(x, y)dy^2 + b_t(x, y)dxdy + c_t(x, y)dx^2$$

é uma perturbação de  $E$  e  $0$  é valor regular de  $\Phi_{(\alpha(t))}$ , para todo  $t \in (0, 1)$ . Portanto, pelo Corolário 4.12,  $E_t$  é uma perturbação boa de  $E$ . ■

Outro resultado que será necessário para demonstrar a invariância do índice de uma EDB é o seguinte teorema. Seja  $h = (h_1, h_2) : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  um germe de difeomorfismo. Denotamos  $h_{1x} = \alpha$ ,  $h_{1y} = \beta$ ,  $h_{2x} = \gamma$  e  $h_{2y} = \xi$  as respectivas derivadas parciais de  $h$ . Considere as seguintes EDB's

$$\tilde{E}(x, y)[dx, dy] = (a + a_0)(x, y)dy^2 + 2(b + b_0)(x, y)dxdy + (c + c_0)(x, y)dx^2 = 0, \quad (5.3)$$

$$\hat{E}[dx, dy] = A(x, y)dy^2 + 2B(x, y)dxdy + C(x, y)dx^2 = 0, \quad (5.4)$$

onde  $(a_0, b_0, c_0) \in \mathcal{Q}_d^3$ , o discriminante de  $\tilde{E}$  é  $\tilde{\delta} = (b + b_0)^2 - (a + a_0)(c + c_0)$  e os coeficientes de  $\hat{E}$  são dados pelas seguintes igualdades

$$\begin{pmatrix} \xi & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (a + a_0) \circ h & (b + b_0) \circ h \\ (b + b_0) \circ h & (c + c_0) \circ h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

e o discriminante de  $\hat{E}$  é  $\hat{\delta} = (\det dh)^2 \cdot \tilde{\delta} \circ h(x, y) = B^2 - AC$ .

Seja  $\psi : \mathbb{R}^2 \times \mathcal{P}_k^3(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^2$  a aplicação suave definida por

$$\psi(x, y, a_0, b_0, c_0) = (\hat{\delta}, A\hat{\delta}_x - B\hat{\delta}_y)(x, y).$$

Seja  $\psi_{(a_0, b_0, c_0)}(x, y) = \psi(x, y, a_0, b_0, c_0)$ .

**Lema 5.5.** *Existe um subconjunto de medida nula  $\Delta$  de  $\mathcal{P}_k^3(\mathbb{R}^2)$  tal que para, todo  $p_0 \in \mathcal{P}_k^3(\mathbb{R}^2) - \Delta$ ,  $0$  é valor regular de  $\psi_{p_0}$ .*

**Demonstração:** A demonstração é análoga à demonstração do Lema 5.3. ■

**Teorema 5.6.** *Sejam  $a, b, c$  funções analíticas reais e  $h$  um germe de difeomorfismo analítico real. Então, existem perturbações boas  $\tilde{E}_t$  e  $\hat{E}_t$  de  $(\tilde{E}, 0)$  e  $(\hat{E}, 0)$  definidas por*

$$\tilde{E}_t(x, y)[dx, dy] = a_t(x, y)dy^2 + 2b_t(x, y)dxdy + c_t(x, y)dx^2 = 0, \quad (5.6)$$

$$\hat{E}_t[dx, dy] = A_t(x, y)dy^2 + 2B_t(x, y)dxdy + C_t(x, y)dx^2 = 0, \quad (5.7)$$

onde

$$\begin{pmatrix} \xi & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_t \circ h & b_t \circ h \\ b_t \circ h & c_t \circ h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_t & B_t \\ B_t & C_t \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

**Demonstração:** A demonstração segue usando os Lemas 5.3, 5.5 e o lema da seleção da curva 1.32. ■

Quando um subconjunto  $Q \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é denso e subanalítico, pelo lema da seleção da curva, sempre existe uma curva suave contida em  $Q$  passando pela origem, mas quando  $Q$  não é subanalítico, isto nem sempre é verdade. O próximo lema mostra que quando  $Q$  é um subconjunto denso, podemos encontrar uma curva suave que passa pela origem e uma sequência de pontos de  $Q$  em cima da curva, convergindo para zero.

**Lema 5.7.** *Seja  $Q$  um subconjunto denso de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Então, existem uma sequência  $\{t_m\}$  de  $\mathbb{R}$  convergindo para 0 e uma curva suave  $\alpha : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  tais que  $\alpha(0) = 0$  e  $\alpha(t_m) \in Q$ .*

**Demonstração:** Seja  $A_m = \{(x, y) = (x, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|y\| < \frac{1}{m}x, x > 0\}$ , para todo  $m \in \mathbb{N}$  é claro que o conjunto é aberto. Seja  $B_m = [B(0, \frac{1}{m}) - \bar{B}(0, \frac{1}{m+1})] \cap A_m$ , um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Pela densidade do conjunto  $Q$ , existem  $(x_m, y_m) \in Q \cap B_m$  tais que  $|x_m| < \frac{1}{m}$ ,  $\|y_m\| < \frac{1}{m}$ ,  $\frac{\|y_m\|}{x_m} < \frac{1}{m}$  e  $x_{m+1} < x_m$ , para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Definimos o caminho

$$f_m : I_m = \left( \frac{x_{m+1} + x_m}{2}, \frac{x_m + 3x_{m-1}}{4} \right) \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

por  $f_m(x) = x \frac{y_m}{x_m}$ . Como  $I_{m+1} \cap I_m \neq \emptyset$ , para todo  $m \in \mathbb{N}$ , então  $\bigcup_m I_m = (0, \frac{x_1 + 3x_0}{4})$ . Seja  $\{\eta_m\}$  uma partição da unidade do intervalo  $(0, \frac{x_1 + 3x_0}{4})$  tal que o suporte de  $\eta_m$  está contido em  $I_m$ , para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Assim, o caminho  $F : (0, \frac{x_1 + 3x_0}{4}) \rightarrow \mathbb{R}^n$  definido por  $F(x) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \eta_m(x) f_m(x)$ , é

diferenciável, e  $F(x_m) = y_m$ . Definimos o caminho  $G : [0, \frac{x_1+3x_0}{4}) \longrightarrow \mathbb{R}^n$  por

$$G(x) = \begin{cases} F(x), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Provaremos que o caminho  $G$  é diferenciável. Mas, como  $F$  é diferenciável, então é suficiente provar que  $G$  é diferenciável em 0. De fato, seja  $G'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{m \in \mathbb{N}} \eta_m(x) \frac{y_m}{x_m}$ , a derivada de  $G$  em 0. Como  $\frac{\|y_m\|}{x_m} < \frac{1}{m}$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ , segue que dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $m_0 \in \mathbb{N}$  tal que se  $m > m_0$  então  $\frac{\|y_m\|}{x_m} < \varepsilon$  e  $\frac{\|y_{m+1}\|}{x_{m+1}} < \varepsilon$ .

Logo, se  $x \in (0, x_{m_0+1})$ , existe um  $i > m_0$  tal que  $x_{i+1} \leq x \leq x_i$ . Assim, temos que

$$\sum_{m \in \mathbb{N}} \eta_m(x) \frac{y_m}{x_m} = \eta_i(x) \frac{y_i}{x_i} + \eta_{i+1}(x) \frac{y_{i+1}}{x_{i+1}} \quad e \quad \eta_i(x) + \eta_{i+1}(x) = 1.$$

Usando as desigualdades  $\frac{\|y_i\|}{x_i} < \varepsilon$  e  $\frac{\|y_{i+1}\|}{x_{i+1}} < \varepsilon$  segue que  $\|\sum_{m \in \mathbb{N}} \eta_m(x) \frac{y_m}{x_m}\| < \varepsilon$ . Portanto  $G$  é diferenciável em 0 e  $G'(0) = 0$ . Analogamente, usando os resultados anteriores obtemos que existe um caminho diferenciável  $H : (-r, 0] \longrightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $H'(0) = 0$ . Assim, a aplicação  $L : (-r, r) \longrightarrow \mathbb{R}^n$  definida por

$$L(x) = \begin{cases} G(x), & \text{se } x \in [0, \frac{x_1+3x_0}{4}) \\ H(x), & \text{se } x \in (-r, 0], \end{cases}$$

é diferenciável. Portanto, o gráfico de  $L$  define uma curva suave  $\alpha : (-r, \frac{x_1+3x_0}{4}) \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  tal que  $\alpha(0) = 0$  e  $\alpha(x_m, y_m) \in Q$ . ■

**Teorema 5.8.** *Se  $a$ ,  $b$  e  $c$  são funções suaves, então existem uma sequência  $\{t_m\}$  de  $\mathbb{R}$  convergindo para 0 e uma perturbação  $E_t$  de  $(E, 0)$  tal que  $E_{t_m} \in \Theta$ , para todo  $t_m$  perto do zero.*

**Demonstração:** Pelo Lema 5.3, existe um subconjunto de medida nula  $\Omega$  de  $\mathcal{P}_k^3(\mathbb{R}^2)$  tal que para todo  $p_0 \in \mathcal{P}_k^3(\mathbb{R}^2) - \Omega$ , 0 é valor regular de  $\Phi_{p_0}$ . Seja  $\Lambda = \mathcal{P}_k^3(\mathbb{R}^2) - \Omega$ . Então,  $\bar{\Lambda} = \mathcal{P}_k^3(\mathbb{R}^2)$  e pelo Lema 5.7, existem uma sequência  $\{t_m\}$  de  $\mathbb{R}$  convergindo para 0 e uma curva suave  $\alpha : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  tal que  $\alpha(0) = 0$  e  $\alpha(t_m) \in \Lambda$ . Portanto, se  $(a_t, b_t, c_t) = (a, b, c) +$

$\alpha(t)$  então

$$E_t(x, y) = a_t(x, y)dy^2 + b_t(x, y)dxdy + c_t(x, y)dx^2$$

é uma perturbação de  $E$  e  $E_{t_m} \in \Theta$ , pois 0 é valor regular de  $\Phi_{(\alpha(t_m))}$ . ■

Quando o germe de difeomorfismo  $h : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  não é analítico real, não podemos aplicar o Teorema 5.6, pois o subconjunto  $\Delta \subset Q_d^3$ , dado no Lema 5.5, não é necessariamente subanalítico. O teorema seguinte mostra que podemos obter perturbações não necessariamente boas, mas perturbações com algumas propriedades.

**Teorema 5.9.** *Sejam  $h : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  um germe de difeomorfismo suave e  $a, b$  e  $c$  funções suaves. Então, existem perturbações  $\tilde{E}_t$  e  $\hat{E}_t$  de  $(\tilde{E}, 0)$  e  $(\hat{E}, 0)$  da forma (5.6) e (5.7) e uma sequência  $\{t_m\}$  de  $\mathbb{R}$  convergindo para 0 tais que  $\tilde{E}_{t_m}, \hat{E}_{t_m} \in \Theta$ .*

**Demonstração:** A demonstração segue usando os Lemas 5.3, 5.5 e 5.7. ■

# Índice de uma equação diferencial binária

Este capítulo contém os resultados centrais do trabalho. Definimos o índice de uma EDB com coeficientes analíticos reais em termos de perturbações boas. Em seguida, mostramos no Teorema 6.8 que este índice independe das perturbações boas escolhidas, exibindo uma fórmula que expressa o índice em termos de informações obtidas a partir dos coeficientes da equação original. Na seção 6.2, mostramos que o índice da EDB é invariante por equivalências analíticas reais. Na seção 6.3, estudamos equações diferenciais binárias com coeficientes suaves e mostramos como estender o índice para esta classe de equações.

## 6.1 Definição do índice

Seja  $E$  uma EDB dada por

$$E(x, y)[dx, dy] = a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 = 0, \quad (6.1)$$

com coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  analíticos reais.

Segue do Lema 4.4 que se  $z_0$  é um ponto singular de  $E$  e um zero não degenerado do campo vetorial  $(\delta, a\delta_x - b\delta_y)$ , então a Equação (6.1) sempre se reduz a uma EDI da forma

$$F(x, y, p) = a(x, y)p^2 + 2b(x, y)p + c(x, y), \quad (6.2)$$

onde  $p = \frac{dy}{dx}$ . Seja  $M = F^{-1}(0)$ . O campo vetorial  $\xi = (F_p, pF_p, -F_x - pF_y)$  definido em  $\mathbb{R}^3$ , induz um campo vetorial  $\xi|_M$  em  $M$  dado pela restrição de  $\xi$  em  $M$ .

O Teorema 4.8 mostra que a condição do ponto singular  $z_0$  da equação diferencial binária

(6.1) ser um ponto não degenerado do campo vetorial  $(\delta, a\delta_x - b\delta_y)$  implica que  $(z_0, p_0)$  é um ponto hiperbólico do campo vetorial  $\xi|_M$ , onde  $p_0 = -\frac{b(z_0)}{a(z_0)}$ , o que motiva a introduzir a seguinte definição.

**Definição 6.1.** Dizemos que  $z_0$  é um ponto singular não degenerado de  $E$  se  $z_0$  é um ponto singular de  $E$  e um zero não degenerado do campo vetorial  $(\delta, a\delta_x - b\delta_y)$ .

Como os pontos hiperbólicos do campo vetorial  $\xi|_M$  são de tipo sela, nó ou foco, então é possível associar um número a cada ponto singular não degenerado  $z_0$  de  $E$ , que será denotado por  $K_\delta(z_0)$ .

**Definição 6.2.** Seja  $z_0$  um ponto singular não degenerado de  $E$ . Então:

(i)  $K_\delta(z_0) = -\frac{1}{2}$  se  $(z_0, p_0)$  é uma sela definida pelo campo vetorial  $\xi|_M$ .

(ii)  $K_\delta(z_0) = \frac{1}{2}$  se  $(z_0, p_0)$  é um nó ou foco definido pelo campo vetorial  $\xi|_M$ .

Os próximos Lemas 6.3 e 6.4 permitem calcular  $K_\delta(z_0)$  em termos do índice de um campo vetorial em  $\mathbb{R}^2$ , que só depende do discriminante e dos coeficientes da equação diferencial binária. Sejam  $T = (\delta\delta_y, a^2\delta_x - ab\delta_y)$  e  $R = (\delta\delta_x, cb\delta_x - c^2\delta_y)$  campos vetoriais em  $\mathbb{R}^2$ . Indicaremos por  $T_\delta(z_0)$  e  $R_\delta(z_0)$ , os determinantes das matrizes jacobianas dos campos vetoriais  $T$  e  $R$  em  $z_0$ , respectivamente. Sejam  $[T_\delta(z_0)] = \frac{T_\delta(z_0)}{2|T_\delta(z_0)|}$  e  $[R_\delta(z_0)] = \frac{R_\delta(z_0)}{2|R_\delta(z_0)|}$ . Quando  $T_\delta(z_0) \neq 0$  e  $R_\delta(z_0) \neq 0$ , temos

$$\text{ind}_{z_0} T = 2[T_\delta(z_0)] \quad \text{e} \quad \text{ind}_{z_0} R = 2[R_\delta(z_0)]. \quad (6.3)$$

**Lema 6.3.** Seja  $z_0$  um ponto singular não degenerado de  $E$ . Então,  $[T_\delta(z_0)] = K_\delta(z_0)$ .

**Demonstração:** A demonstração segue usando a Equação (4.14) do Lema 4.7. ■

**Lema 6.4.** Seja  $z_0$  um ponto singular não degenerado de  $E$ . Se  $z_0$  é um zero não degenerado do campo vetorial  $(\delta, b\delta_x - c\delta_y)$ , então  $K_\delta(z_0) = [R_\delta(z_0)]$ .

**Demonstração:** Pelos Lemas 4.4 e 4.5,  $a(z_0) \neq 0$ ,  $\delta_y(z_0) \neq 0$ ,  $c(z_0) \neq 0$  e  $\delta_x(z_0) \neq 0$ . Considerando as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} (c\delta\delta_y, ca\delta_x - cb\delta_y) &= (-\delta(b\delta_x - c\delta_y) + b\delta\delta_x, -\delta\delta_x + b(b\delta_x - c\delta_y)) \\ &= (\delta\delta_x b + (b\delta_x - c\delta_y)(-\delta), -\delta\delta_x + (b\delta_x - c\delta_y)b), \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{pmatrix} b & -\delta \\ -1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \delta_x \\ (b\delta_x - c\delta_y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta \delta_y \\ a\delta_x - b\delta_y \end{pmatrix}.$$

Como  $\delta(z_0) = 0$ , temos que  $b(z_0) \neq 0$  e  $\text{sign}[a(z_0)] = \text{sign}[c(z_0)]$ . Assim,  $\text{ind}_{z_0} T = \text{ind}_{z_0} R$ .

Portanto, pelo Lema 6.3 e a Equação (6.3), o resultado segue. ■

Do Teorema 5.4, segue que uma equação diferencial binária com coeficientes analíticos admite uma perturbação boa

$$E_t = a_t dy^2 + 2b_t dx dy + c_t dx^2$$

para todo  $t$  perto do zero. Então, uma primeira definição do índice de uma EDB poderia ser

$$I(E, 0) = \sum_i K_{\delta_t}(z_i), \quad (6.4)$$

onde  $z_i$  são os pontos singulares não degenerados de  $E_t$ , mas esta definição depende da perturbação boa escolhida. De fato, considere a EDB da forma

$$dy^2 - (x^3 + xy)dx^2 = 0.$$

Escolhendo uma perturbação boa da forma

$$dy^2 - (x^3 + xy + \varepsilon)dx^2 = 0,$$

obtemos um só ponto singular não degenerado,  $(\sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{2}}, -3\sqrt[3]{\frac{\varepsilon^2}{4}})$ . Para calcular o índice da EDB usamos o Lema 6.3, assim obtemos que

$$I(E, 0) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & \text{se } \varepsilon > 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{se } \varepsilon < 0. \end{cases}$$

Portanto, não é possível definir o índice de uma equação diferencial binária como a soma de números  $K_{\delta_\varepsilon}(z_i)$ , onde  $z_i$  são os pontos singulares não degenerados de uma perturbação boa. A nova definição dada a seguir permite solucionar o problema da dependência das perturbações boas e estender a definição do índice de uma equação diferencial binária positiva.

**Definição 6.5.** *Sejam  $a, b, c$  funções analíticas reais da Equação (6.1) e  $E_t$  uma perturbação boa do germe  $(E, 0)$ . Então, o índice da equação diferencial binária em 0 é definido por*

$$I(E, 0) = \sum_i K_{\delta_t}(z_i) + \sum_{\delta_t(u_i) < 0} \text{ind}_{u_i}(\delta_{t,x}, \delta_{t,y}),$$

onde  $z_i$  são pontos singulares não degenerados de  $E_t$  e  $u_i$  pontos críticos da parte negativa de  $\delta_t$ .

**Observação.** Note que se consideramos perturbações boas  $E_t$  tais que os pontos críticos da função discriminante de  $E_t$  aconteçam na parte positiva desta função, então é possível definir o índice da equação diferencial binária como (6.4) e provar que o índice independe desta classe de perturbações.

Usando o Lema 6.3, podemos expressar  $I(E, 0)$  em termos do discriminante e dos coeficientes da EDB, isto é,

$$I(E, 0) = \sum_i [T_{t\delta_t}(z_i)] + \sum_{\delta_t(u_i) < 0} \text{ind}_{u_i}(\delta_{t,x}, \delta_{t,y}),$$

onde  $T_{t\delta_t}(z_i)$  é o determinante da matriz jacobiana do campo vetorial  $T_t = (\delta_t \delta_{t,y}, a_t^2 \delta_{t,x} - a_t b_t \delta_{t,y})$  em  $z_i$ ,  $T_t(z_i) = 0$  e  $[T_{t\delta_t}(z_i)] = \frac{T_{t\delta_t}(z_i)}{2|T_{t\delta_t}(z_i)|}$ . Analogamente, usando o Lema 6.4, temos que

$$I(E, 0) = \sum_i [R_{t\delta_t}(z_i)] + \sum_{\delta_t(u_i) < 0} \text{ind}_{u_i}(\delta_{t,x}, \delta_{t,y}),$$

onde  $R_{t\delta_t}(z_i)$  é o determinante da matriz jacobiana do campo vetorial  $R_t = (\delta_t \delta_{t,x}, c_t b_t \delta_{t,x} - c_t^2 \delta_{t,y})$  em  $z_i$ ,  $R_t(z_i) = 0$  e  $[R_{t\delta_t}(z_i)] = \frac{R_{t\delta_t}(z_i)}{2|R_{t\delta_t}(z_i)|}$ .

O resultado abaixo caracteriza os zeros não degenerados do campo  $(\delta, a\delta_x - b\delta_y)$  que não são pontos singulares da EDB.

**Lema 6.6.** *Sejam  $z_0$  um zero não degenerado do campo  $(\delta, a\delta_x - b\delta_y)$  e  $a(z_0) = 0$ . Então,  $c(z_0) \neq 0$ ,  $\delta_y(z_0) \neq 0$  e  $\text{ind}_{z_0}(\delta, (a\delta_x - b\delta_y)a\delta_y) = \text{ind}_{z_0}(a, b)$ .*

**Demonstração:** Suponha que  $a(z_0) = 0$ . Então,  $b(z_0) = 0$ . Logo, pelo Lema 4.4,  $c(z_0) \neq 0$  e

$\delta_y(z_0) \neq 0$ . Daí,  $(\delta, c(a\delta_x - b\delta_y)a\delta_y) = (\delta, -\delta\delta_x a\delta_y + ba\delta_y(b\delta_x - c\delta_y))$ . Então,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\delta_x a\delta_y & \delta_y(b\delta_x - c\delta_y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \\ ba \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta \\ c(a\delta_x - b\delta_y)a\delta_y \end{pmatrix}.$$

Assim do Teorema 2.6 segue que

$$\begin{aligned} \text{ind}_{z_0}(\delta, (a\delta_x - b\delta_y)a\delta_y) &= -\text{ind}_{z_0}(\delta, ba) \\ &= -\text{sign}[c(z_0)] \cdot \text{ind}_{z_0}(b^2 - ac, bca). \end{aligned}$$

Por outro lado, sejam  $h, f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  aplicações suaves dadas por  $h(x, y) = (b, ac)(x, y)$  e  $f(x, y) = (x^2 - y, xy)$ . Então,  $f \circ h = (b^2 - ac, bca)$ . Logo,

$$\begin{aligned} \text{ind}_{z_0}(b^2 - ac, bca) &= \text{ind}_0 f \cdot \text{ind}_{z_0}(b, ac) \\ &= \text{ind}_0 f \cdot \text{sign}[c(z_0)] \cdot \text{ind}_{z_0}(b, a). \end{aligned}$$

Portanto, como o índice de  $f$  em 0 é 1, temos que  $\text{ind}_{z_0}(\delta, (a\delta_x - b\delta_y)a\delta_y) = \text{ind}_{z_0}(a, b)$ . ■

O próximo resultado será usado na demonstração do Teorema 6.8 e da invariância do  $I(E, 0)$ .

**Teorema 6.7.** (Desigualdade de Lojasiewicz [35]) *Seja  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  uma função analítica real tal que 0 é um ponto crítico de  $f$ . Então, existe uma vizinhança  $U$  de 0 em  $\mathbb{R}^n$  tal que, para todo  $x \in U$*

$$\|\nabla f(x)\| \geq c|f(x)|^\rho,$$

onde  $0 < \rho < 1$  e  $c > 0$ .

Vamos mostrar agora que o índice da equação diferencial binária com coeficientes analíticos reais pode ser calculado a partir de informação da própria equação diferencial binária, não depende portanto da perturbação escolhida.

**Teorema 6.8.** *Sejam 0 um ponto singular de  $E$  e  $a, b, c$  funções analíticas reais. Então:*

(i) *Se 0 é um zero isolado dos campos vetoriais  $(\delta, a\delta_x - b\delta_y)$  e  $(\delta, \delta_y)$ , então*

$$I(E, 0) = \frac{1}{2} \text{ind}_0(\delta, (a\delta_x - b\delta_y)a\delta_y) - \frac{1}{2} \text{ind}_0(a, b) - \frac{1}{2} \text{ind}_0(\delta\delta_x, \delta_y) + \frac{1}{2} \text{ind}_0(\delta_x, \delta_y).$$

(ii) Se 0 é um zero isolado dos campos vetoriais  $(\delta, b\delta_x - c\delta_y)$  e  $(\delta, \delta_x)$ , então

$$I(E, 0) = \frac{1}{2} \text{ind}_0(\delta, (b\delta_x - c\delta_y)c\delta_x) + \frac{1}{2} \text{ind}_0(c, b) + \frac{1}{2} \text{ind}_0(\delta\delta_y, \delta_x) + \frac{1}{2} \text{ind}_0(\delta_x, \delta_y).$$

**Demonstração:** (i) Da hipótese que 0 é um zero isolado do campo vetorial  $(\delta, a\delta_x - b\delta_y)$  e usando o Teorema 6.7, segue que 0 é um zero isolado do campo vetorial  $(\delta_x, \delta_y)$ . Pelo Teorema 5.4, existe uma perturbação boa  $E_t$  de  $E$  tal que 0 é um valor regular do campo vetorial  $W_t = (\delta_t, a_t\delta_{t,x} - b_t\delta_{t,y})$ , para todo  $t$  perto do zero. Do Teorema 2.2,

$$\text{ind}_0(\delta, (a\delta_x - b\delta_y)a\delta_y) = \sum \text{ind}_{z_i}(\delta_t, (a_t\delta_{t,x} - b_t\delta_{t,y})a_t\delta_{t,y}). \quad (6.5)$$

Fixe um  $t$  próximo do zero. Sejam  $C_1 = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid a_t(z) = 0\}$ ,  $C_2 = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid a_t(z) \neq 0\}$ ,  $C_3 = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \delta_t(z) = (a_t\delta_{t,x} - b_t\delta_{t,y})(z) = 0\}$  e  $C_4 = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \delta_t(z) = \delta_{t,y}(z) = 0\}$ . Então, (6.5) é igual a

$$\sum_{z_i \in C_1} \text{ind}_{z_i}(\delta_t, (a_t\delta_{t,x} - b_t\delta_{t,y})a_t\delta_{t,y}) + \sum_{z_i \in C_2} \text{ind}_{z_i}(\delta_t, (a_t\delta_{t,x} - b_t\delta_{t,y})a_t\delta_{t,y}). \quad (6.6)$$

Pelo Lema 6.6,

$$\begin{aligned} \sum_{z_i \in C_1} \text{ind}_{z_i}(\delta_t, (a_t\delta_{t,x} - b_t\delta_{t,y})a_t\delta_{t,y}) &= \sum \text{ind}_{z_i}(a_t, b_t) \\ &= \text{ind}_0(a, b). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Do lema 4.4, temos,  $(C_2 \cap C_3) \cap (C_2 \cap C_4) = \emptyset$ . Assim, o segundo somando de (6.6) é igual a

$$\sum_{z_i \in C_2 \cap C_3} \text{ind}_{z_i}(\delta_t, (a_t\delta_{t,x} - b_t\delta_{t,y})a_t\delta_{t,y}) + \sum_{z_i \in C_2 \cap C_4} \text{ind}_{z_i}(\delta_t, (a_t\delta_{t,x} - b_t\delta_{t,y})a_t\delta_{t,y}).$$

Pelos Lemas 6.3 e 4.4,

$$\sum_{z_i \in C_2 \cap C_3} \text{ind}_{z_i}(\delta_t, (a_t\delta_{t,x} - b_t\delta_{t,y})a_t\delta_{t,y}) = \sum 2[T_{\delta_t}(z_i)] \quad (6.8)$$

$$\sum_{z_i \in C_2 \cap C_4} \text{ind}_{z_i}(\delta_t, (a_t\delta_{t,x} - b_t\delta_{t,y})a_t\delta_{t,y}) = \sum_{z_i \in C_2 \cap C_4} \text{sign}[\delta_{t,x}(z_i)] \text{ind}_{z_i}(\delta_t, \delta_{t,y}) \quad (6.9)$$

Por outro lado, pelo Lema 4.4,

$$\text{ind}_0(\delta\delta_x, \delta_y) - \text{ind}_0(\delta_x, \delta_y) = \sum \text{sign}[\delta_{t_x}(z_i)] \text{ind}_{z_i}(\delta_t, \delta_{t_y}) - 2 \sum_{\delta_t(z_i) < 0} \text{ind}_{z_i}(\delta_{t_x}, \delta_{t_y}).$$

Assim,

$$\sum_{z_i \in C_2 \cap C_4} \text{ind}_{z_i}(\delta_t, (a_t\delta_{t_x} - b_t\delta_{t_y})a_t\delta_{t_y}) = \text{ind}_0(\delta\delta_x, \delta_y) - \text{ind}_0(\delta_x, \delta_y) + 2 \sum_{\delta_t(z_i) < 0} \text{ind}_{z_i}(\delta_{t_x}, \delta_{t_y}).$$

Portanto, segue da equação acima e das Equações (6.6), (6.7) e (6.8) que

$$I(E, 0) = \frac{1}{2} \text{ind}_0(\delta, (a\delta_x - b\delta_y)a\delta_y) - \frac{1}{2} \text{ind}_0(a, b) - \frac{1}{2} \text{ind}_0(\delta\delta_x, \delta_y) + \frac{1}{2} \text{ind}_0(\delta_x, \delta_y).$$

ii) Para demonstrar (ii), basta fazer uma mudança de coordenadas  $X = y$  e  $Y = x$  e usar a fórmula (i) para esta nova equação. ■

Quando as funções  $a$ ,  $b$  e  $c$  não se anulam simultaneamente em 0, a expressão do índice se simplifica, e o resultado é verdadeiro sem a hipótese que 0 é um zero isolado dos campos vetoriais  $(\delta, \delta_y)$  e  $(\delta, \delta_x)$

**Teorema 6.9.** *Sejam 0 um ponto singular de E e a, b e c funções analíticas reais não todas nulas em 0. Então:*

(i) *Se  $a(0, 0) \neq 0$  e 0 é um zero isolado do campo vetorial  $(\delta, a\delta_x - b\delta_y)$ , então*

$$I(E, 0) = \frac{1}{2} \text{ind}_0(\delta\delta_y, a^2\delta_x - ab\delta_y) + \frac{1}{2} \text{ind}_0(\delta_x, \delta_y).$$

(ii) *Se  $c(0, 0) \neq 0$  e 0 é um zero isolado do campo vetorial  $(\delta, b\delta_x - c\delta_y)$ , então*

$$I(E, 0) = \frac{1}{2} \text{ind}_0(\delta\delta_x, cb\delta_x - c^2\delta_y) + \frac{1}{2} \text{ind}_0(\delta_x, \delta_y).$$

**Demonstração:** (i) Pelo Teorema 5.4, existe uma perturbação boa  $E_t$  de  $E$  tal que 0 é um valor regular do campo vetorial  $W_t = (\delta_t, a_t\delta_{t_x} - b_t\delta_{t_y})$ , para todo  $t$  perto do zero. Como  $a(0, 0) \neq 0$ ,

então  $a_t(0,0) \neq 0$  para todo  $t$  perto do zero. Do Teorema 2.2,

$$\text{ind}_0(\delta\delta_y, (a\delta_x - b\delta_y)a) = \sum \text{ind}_{z_i}(\delta_t\delta_{ty}, (a_t\delta_{tx} - b_t\delta_{ty})a_t). \quad (6.10)$$

Fixe um  $t$  próximo do zero. Sejam  $C_1 = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \delta_t(z) = (a_t\delta_{tx} - b_t\delta_{ty})(z) = 0\}$  e  $C_2 = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \delta_t(z) = \delta_{ty}(z) = 0\}$ . Segue do lema 4.4 que  $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ . Então, (6.10) é igual a

$$\sum_{z_i \in C_1} \text{ind}_{z_i}(\delta_t\delta_{ty}, (a_t\delta_{tx} - b_t\delta_{ty})a_t) + \sum_{z_i \in C_2} \text{ind}_{z_i}(\delta_t\delta_{ty}, (a_t\delta_{tx} - b_t\delta_{ty})a_t). \quad (6.11)$$

Pelos Lemas 4.4 e 6.3,

$$\sum_{z_i \in C_1} \text{ind}_{z_i}(\delta_t\delta_{ty}, (a_t\delta_{tx} - b_t\delta_{ty})a_t) = \sum 2[T_{\delta_t}(z_i)] \quad (6.12)$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{z_i \in C_2} \text{ind}_{z_i}(\delta_t\delta_{ty}, (a_t\delta_{tx} - b_t\delta_{ty})a_t) &= \sum \text{sign}[\delta_t(z_i)] \text{ind}_{z_i}(\delta_{ty}, \delta_{tx}) \\ &= \sum_{\delta_t(z_i) > 0} \text{ind}_{z_i}(\delta_{ty}, \delta_{tx}) - \sum_{\delta_t(z_i) < 0} \text{ind}_{z_i}(\delta_{ty}, \delta_{tx}) \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\text{ind}_0(\delta_y, \delta_x) = \sum_{\delta_t(z_i) > 0} \text{ind}_{z_i}(\delta_{ty}, \delta_{tx}) + \sum_{\delta_t(z_i) < 0} \text{ind}_{z_i}(\delta_{ty}, \delta_{tx}). \quad (6.13)$$

Pela Equação (6.13),

$$\sum_{z_i \in C_2} \text{ind}_{z_i}(\delta_t\delta_{ty}, (a_t\delta_{tx} - b_t\delta_{ty})a_t) = \text{ind}_0(\delta_y, \delta_x) - 2 \sum_{\delta_t(z_i) < 0} \text{ind}_{z_i}(\delta_{ty}, \delta_{tx}). \quad (6.14)$$

Logo, pelas Equações (6.12) e (6.14),

$$\text{ind}_0(\delta\delta_y, (a\delta_x - b\delta_y)a) = \sum 2[T_{\delta_t}(z_i)] + \text{ind}_0(\delta_y, \delta_x) - 2 \sum_{\delta_t(z_i) < 0} \text{ind}_{z_i}(\delta_{ty}, \delta_{tx}).$$

Portanto,

$$I(E, 0) = \frac{1}{2} \text{ind}_0(\delta \delta_y, a^2 \delta_x - ab \delta_y) + \frac{1}{2} \text{ind}_0(\delta_x, \delta_y).$$

ii) A demonstração é análoga a (i). ■

**Observação.** Assumindo que  $(\delta, \delta_y)$  ou  $(\delta, \delta_x)$  tem zero isolado na origem, respectivamente quando  $a(0,0) \neq 0$  ou  $c(0,0) \neq 0$ , podemos também obter o resultado do Teorema 6.9 como corolário do Teorema 6.8.

A seguir, obtemos a fórmula para o índice da EDB quando o discriminante é um ponto isolado. Esta fórmula foi demonstrada por Hopf em [32] e aparece em várias aplicações das equações diferenciais binárias à geometria diferencial.

**Corolário 6.10.** *Sejam  $a, b, c$  funções analíticas reais que se anulam em  $0$ ,  $\delta \geq 0$  e  $\delta(x, y) = 0$  se, e somente se  $x = y = 0$ . Então,  $I(E, 0) = -\frac{1}{2} \text{ind}_0(a, b) = -\frac{1}{2} \text{ind}_0(b, c)$ .*

**Demonstração:** Seja  $(\delta \delta_x + \varepsilon \delta_x, \delta_y)$  uma perturbação do campo vetorial  $(\delta \delta_x, \delta_y)$ . Então, pelo Teorema 2.2,

$$\begin{aligned} \text{ind}_0(\delta \delta_x, \delta_y) &= \sum \text{ind}_{z_i}(\delta \delta_x + \varepsilon \delta_x, \delta_y) \\ &= \sum \text{sign}[\delta_x(z_i)] \text{ind}_{z_i}(\delta + \varepsilon, \delta_y) + \text{sign}[\varepsilon] \text{ind}_0(\delta_x, \delta_y). \end{aligned}$$

Fixe  $\varepsilon > 0$ . Então,

$$\text{ind}_0(\delta \delta_x, \delta_y) = \text{ind}_0(\delta_x, \delta_y).$$

Analogamente, obtemos que  $\text{ind}_0(\delta \delta_y, \delta_x) = \text{ind}_0(\delta_y, \delta_x)$ . Portanto, pelo Teorema 6.8,

$$I(E, 0) = -\frac{1}{2} \text{ind}_0(a, b) = -\frac{1}{2} \text{ind}_0(b, c).$$

■

## 6.2 Invariância de $I(E, 0)$

Neste seção provaremos que  $I(E, 0)$  é invariante por equivalências analíticas reais no espaço dos germes de equações diferenciais binárias com coeficientes analíticos reais.

Primeiramente provaremos que o índice da EDB é invariante por multiplicação de germes

de funções analíticas de  $(\mathbb{R}^2, 0)$  em  $\mathbb{R}$ , não nulas em 0. Podemos supor que o índice da EDB é dado pela formula do item (i) do Teorema 6.8. Seja  $T : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  um germe analítico real tal que  $T(0) \neq 0$ ,

$$E(x, y)[dx, dy] = a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 = 0 \quad (6.15)$$

uma equação diferencial binária com coeficientes analíticos reais. Seja  $\delta = b^2 - ac$  a função discriminante de  $E$ . Multiplicando a EDB (6.15) por  $T$  temos

$$E_1(x, y)[dx, dy] = A(x, y)dy^2 + 2B(x, y)dxdy + C(x, y)dx^2 = 0, \quad (6.16)$$

onde  $A = T \cdot a$ ,  $B = T \cdot b$  e  $C = T \cdot c$ . Seja  $\hat{\delta} = B^2 - AC = T^2 \delta$  a função discriminante de  $E_1$ . Seja  $g = T^2$ . Então,  $\hat{\delta} = g\delta$ .

**Lema 6.11.** *Sejam  $a, b$  e  $c$  funções analíticas reais. Se 0 é um zero isolado dos campos vetoriais  $(\delta, \delta_y)$  e  $(\delta, a\delta_x - b\delta_y)$ , então  $\text{ind}_0(\hat{\delta}, (A\hat{\delta}_x - B\hat{\delta}_y)A\hat{\delta}_y) = \text{ind}_0(\delta, (a\delta_x - b\delta_y)a\delta_y)$ .*

**Demonstração:** Como  $\hat{\delta} = g\delta$ , então

$$(a\hat{\delta}_x - b\hat{\delta}_y)a\hat{\delta}_y = (a\delta_x - b\delta_y)g^2a\delta_y + a\delta[(ag_x - bg_y)(g_y\delta + g\delta_y) + (a\delta_x - b\delta_y)gg_y].$$

Logo,

$$\begin{pmatrix} g & 0 \\ L & g^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \\ (a\delta_x - b\delta_y)a\delta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\delta} \\ (a\hat{\delta}_x - b\hat{\delta}_y)a\hat{\delta}_y \end{pmatrix},$$

onde  $L = a[(ag_x - bg_y)(g_y\delta + g\delta_y) + (a\delta_x - b\delta_y)gg_y]$ . Portanto, pelo Teorema 2.6,

$$\text{ind}_0(\hat{\delta}, (A\hat{\delta}_x - B\hat{\delta}_y)A\hat{\delta}_y) = \text{ind}_0(\delta, (a\delta_x - b\delta_y)a\delta_y).$$

■

**Lema 6.12.** *Sejam  $a, b$  e  $c$  funções analíticas reais. Então:*

(i) *Se 0 é um zero isolado do campo vetorial  $(\delta_x, \delta_y)$ , então  $\text{ind}_0(\hat{\delta}_x, \hat{\delta}_y) = \text{ind}_0(\delta_x, \delta_y)$ .*

(ii) *Se 0 é um zero isolado do campo vetorial  $(\delta\delta_x, \delta_y)$ , então  $\text{ind}_0(\hat{\delta}\hat{\delta}_x, \hat{\delta}_y) = \text{ind}_0(\delta\delta_x, \delta_y)$ .*

**Demonstração:** (i) Como  $\hat{\delta} = g\delta$ , então  $\hat{\delta}_x = g_x\delta + g\delta_x$  e  $\hat{\delta}_y = g_y\delta + g\delta_y$ .

Considere a homotopia  $H : \mathbb{R}^2 \times [1, 0] \longrightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$H(x, y, t) = (tg_x\delta + g\delta_x, tg_y\delta + g\delta_y),$$

tal que  $H(x, y, 0) = (g\delta_x, g\delta_y)$  e  $H(x, y, 1) = (\hat{\delta}_x, \hat{\delta}_y)$ .

Vamos mostrar que existe uma vizinhança  $U$  de  $(0, 0)$  em  $\mathbb{R}^2$  tal que, para todo  $z \in U - \{0\}$  e  $t \in [1, 0]$ ,  $H(z, t) \neq 0$ . De fato, suponha, por absurdo, que exista uma sequência  $(z_i, t_i) \in \mathbb{R}^2 \times [1, 0]$  tal que  $z_i$  converge a 0,  $H(z_i, t_i) = 0$  e  $z_i \neq 0$ . Então,

$$\delta_x(z_i) = \frac{-t_i g_x(z_i) \delta(z_i)}{g(z_i)} \quad \text{e} \quad \delta_y(z_i) = \frac{-t_i g_y(z_i) \delta(z_i)}{g(z_i)}.$$

Da hipótese que 0 é um zero isolado do campo  $(\delta_x, \delta_y)$ , segue que  $\delta(z_i) \neq 0$ . Logo, pela desigualdade de Lojasiewicz, existe uma vizinhança  $U$  de 0 em  $\mathbb{R}^2$  tal que para todo  $z \in U$ ,

$$\delta_x^2(z) + \delta_y^2(z) \geq c^2 |\delta(z)|^{2\rho}, \quad (6.17)$$

onde  $0 < \rho < 1$ ,  $c > 0$ . Substituindo as derivadas parciais de  $\delta$  no ponto  $z_i$  em (6.17) obtemos

$$\frac{(t_i g_x)^2(z_i) \delta^{2-2\rho}(z_i)}{g^2(z_i)} + \frac{(t_i g_y)^2(z_i) \delta^{2-2\rho}(z_i)}{g^2(z_i)} \geq c^2, \quad (6.18)$$

onde  $2 - 2\rho > 0$ . Como  $z_i$  converge a 0, segue da expressão (6.18) que  $c = 0$ , o que é absurdo.

Portanto, pelo Teorema 2.1,  $\text{ind}_0(\hat{\delta}_x, \hat{\delta}_y) = \text{ind}_0(\delta_x, \delta_y)$ .

(ii) A demonstração é análoga a (i). ■

**Teorema 6.13.** *Sejam  $a$ ,  $b$  e  $c$  funções analíticas reais. Se 0 é um zero isolado dos campos vetoriais  $(\delta, \delta_y)$  e  $(\delta, a\delta_x - b\delta_y)$ , então  $I(E, 0) = I(E_1, 0)$ .*

**Demonstração:** A demonstração segue usando o Teorema 6.8 e os Lemas 6.11 e 6.12. ■

A seguir mostraremos que o índice  $I(E, 0)$  é invariante por equivalência analítica real.

Sejam  $(\tilde{E}, 0)$  e  $(L, 0)$  germes de EDB's dadas por

$$\tilde{E}(x, y)[dx, dy] = \tilde{a}(x, y)dy^2 + 2\tilde{b}(x, y)dxdy + \tilde{c}(x, y)dx^2 = 0, \quad (6.19)$$

$$L(x, y)[dx, dy] = A(x, y)dy^2 + 2B(x, y)dxdy + C(x, y)dx^2 = 0, \quad (6.20)$$

tais que  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{b}$ ,  $\tilde{c}$ ,  $A$ ,  $B$  e  $C$  são germes de funções analíticas reais.

Suponha que os germes das EDB's  $(\tilde{E}, 0)$  e  $(L, 0)$  são analiticamente equivalentes. Então, existe uma função analítica  $\rho : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  não nula em 0 e um germe de difeomorfismo analítico  $h = (h_1, h_2) : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  tais que

$$\begin{pmatrix} \xi & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho(\tilde{a} \circ h) & \rho(\tilde{b} \circ h) \\ \rho(\tilde{b} \circ h) & \rho(\tilde{c} \circ h) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}, \quad (6.21)$$

onde  $h_{1x} = \alpha$ ,  $h_{1y} = \beta$ ,  $h_{2x} = \gamma$  e  $h_{2y} = \xi$  são as derivadas parciais de  $h$ . Multiplicando a Equação (6.19) pela função analítica  $\rho \circ h^{-1} : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ , obtemos

$$E(x, y)[dx, dy] = a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 = 0, \quad (6.22)$$

onde  $a = (\rho \circ h^{-1}) \cdot \tilde{a}$ ,  $b = (\rho \circ h^{-1}) \cdot \tilde{b}$  e  $c = (\rho \circ h^{-1}) \cdot \tilde{c}$ . Logo,

$$\begin{pmatrix} \xi & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \circ h & b \circ h \\ b \circ h & c \circ h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \quad (6.23)$$

e pelo Teorema 6.13,  $I(\tilde{E}, 0) = I(E, 0)$ .

Portanto, demonstrar que  $I(\tilde{E}, 0) = I(L, 0)$  se reduz a demonstrar que  $I(E, 0) = I(L, 0)$ . Neste caso, podemos supor, fazendo uma mudança de coordenadas  $X = y$  e  $Y = x$  se for necessário, que os índices dos germes  $(E, 0)$  e  $(L, 0)$  são dados pela fórmula do ítem (i) do Teorema 6.8.

Seja  $\hat{\delta}(x, y) = (B^2 - AC)(x, y) = (\det dh)^2 \delta \circ h(x, y)$  o discriminante de  $L$ , onde  $\delta(x, y) =$

$(b^2 - ac)(x, y)$  é o discriminante de  $E$ . Considerando  $\tilde{\delta} = \delta \circ h$  e usando (6.23), obtemos

$$A\tilde{\delta}_x - B\tilde{\delta}_y = S\{\xi[(a\delta_x - b\delta_y) \circ h] - \beta[(c\delta_y - b\delta_x) \circ h]\} \quad (6.24)$$

$$(a \circ h)(A\tilde{\delta}_x - B\tilde{\delta}_y) = S\{\beta(\delta \circ h)(\delta_y \circ h) + [\xi(a \circ h) + \beta(b \circ h)][(a\delta_x - b\delta_y) \circ h]\} \quad (6.25)$$

$$(a \circ h)A = [\xi(a \circ h) + \beta(b \circ h)]^2 - \beta^2(\delta \circ h) \quad (6.26)$$

$$\tilde{\delta}_y = \xi(\delta_y \circ h) + \beta(\delta_x \circ h), \quad (6.27)$$

onde  $S = \xi\alpha - \beta\gamma$ . Estas equações serão usadas nas demonstrações dos próximos Lemas.

A idéia da demonstração da invariância consiste em duas etapas. Primeiro temos que achar um caminho suave  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathcal{P}_k^3(\mathbb{R}^2)$  tal que  $\alpha(0) = 0$  e

$$E_t(x, y)[dx, dy] = a_t(x, y)dy^2 + 2b_t(x, y)dxdy + c_t(x, y)dx^2 = 0, \quad (6.28)$$

$$L_t(x, y)[dx, dy] = A_t(x, y)dy^2 + 2B_t(x, y)dxdy + C_t(x, y)dx^2 = 0, \quad (6.29)$$

sejam perturbações boas de  $E$  e  $L$ , onde  $(a_t, b_t, c_t) = (a, b, c) + \alpha(t)$  e os coeficientes de  $L_t$  são dados pelas seguintes igualdades

$$\begin{pmatrix} \xi & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_t \circ h & b_t \circ h \\ b_t \circ h & c_t \circ h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_t & B_t \\ B_t & C_t \end{pmatrix}. \quad (6.30)$$

Em seguida, mostramos que os pontos singulares não degenerados de  $E_t$  e  $L_t$  para  $t$  perto de zero, estão em correspondência biunívoca, isto é,  $z_0$  é um ponto singular não degenerado de  $L_t$  se e somente se,  $h(z_0)$  é um ponto singular não degenerado de  $E_t$ , e depois mostramos que  $K_{\hat{\delta}_t}(h(z_0)) = K_{\hat{\delta}}(z_0)$ , onde  $\hat{\delta} = (\det dh)^2 \delta \circ h$ . Mas, pelo Teorema 5.6, o caminho sempre existe. Portanto, resta provar a segunda questão.

Sejam  $g = (\det dh)^2$  e  $\hat{\delta} = (\det dh)^2 \delta \circ h = g\tilde{\delta}$ . O resultado abaixo será usado na demonstração do Lema 6.15 e o Teorema 6.18.

**Lema 6.14.** *Seja  $z_0$  um zero isolado dos campos vectoriais  $(\delta, a\delta_x - b\delta_y)$  e  $(\delta, \delta_y)$ . Então,  $ind_{z_0}(\hat{\delta}, (A\hat{\delta}_x - B\hat{\delta}_y)A\hat{\delta}_y) = ind_{z_0}(\tilde{\delta}, (A\tilde{\delta}_x - B\tilde{\delta}_y)A\tilde{\delta}_y)$ .*

**Demonstração:** Como  $\hat{\delta} = g \cdot \tilde{\delta}$ , então

$$(A\hat{\delta}_x - B\hat{\delta}_y)A\hat{\delta}_y = (A\tilde{\delta}_x - B\tilde{\delta}_y)A\tilde{\delta}_y g^2 + [(A\tilde{\delta}_x - B\tilde{\delta}_y)gAg_y + (Ag_x - Bg_y)A\tilde{\delta}_y]\tilde{\delta}.$$

Logo,

$$\begin{pmatrix} g & 0 \\ L & g^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\delta} \\ (A\tilde{\delta}_x - B\tilde{\delta}_y)A\tilde{\delta}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\delta} \\ (A\hat{\delta}_x - B\hat{\delta}_y)A\hat{\delta}_y \end{pmatrix},$$

onde  $L = (A\tilde{\delta}_x - B\tilde{\delta}_y)gAg_y + (Ag_x - Bg_y)A\tilde{\delta}_y$ . Portanto, pelo Teorema 2.6,

$$\text{ind}_{z_0}(\hat{\delta}, (A\hat{\delta}_x - B\hat{\delta}_y)A\hat{\delta}_y) = \text{ind}_{z_0}(\tilde{\delta}, (A\tilde{\delta}_x - B\tilde{\delta}_y)A\tilde{\delta}_y).$$

■

O lema a seguir mostra que os pontos singulares não degenerados de  $E_t$  e  $L_t$  estão em correspondência biunívoca pela aplicação  $h$ . Podemos supor, sem perda de generalidade, que 0 é valor regular dos campos  $V_1 = (\delta, a\delta_x - b\delta_y)$  e  $V_2 = (\hat{\delta}, A\hat{\delta}_x - B\hat{\delta}_y)$ .

**Lema 6.15.** *Seja 0 um valor regular dos campos  $V_1$  e  $V_2$ . Então,  $z_0$  é um ponto singular não degenerado de  $L$  se, e somente se,  $h(z_0)$  é um ponto singular não degenerado de  $E$ .*

**Demonstração:** Suponha que  $z_0$  é um ponto singular não degenerado de  $L$ . Então, pelo Lema 4.4,  $\hat{\delta}(z_0) = (A\hat{\delta}_x - B\hat{\delta}_y)(z_0) = 0$ ,  $A(z_0) \neq 0$  e  $\tilde{\delta}_y(z_0) \neq 0$ . Segue do Lema 6.14 que  $\tilde{\delta}(z_0) = (A\tilde{\delta}_x - B\tilde{\delta}_y)(z_0) = 0$ .

Vamos mostrar que  $(a \circ h)(z_0) \neq 0$ . De fato, suponha, por absurdo, que  $a(h(z_0)) = 0$ . Então,  $b(h(z_0)) = 0$ . Pelo Lema 6.6,  $c(h(z_0)) \neq 0$  e  $\delta_y(h(z_0)) \neq 0$ . Substituindo  $z_0$  na Equação (6.24) obtemos  $\beta(z_0) = 0$ . Por outro lado, usando (6.21) temos:  $A = \xi^2 \cdot a \circ h + 2\beta \cdot b \circ h + \beta^2 \cdot c \circ h$ . Logo,  $A(z_0) = 0$ , o que é um absurdo.

Assim,  $a(h(z_0)) \neq 0$ . Das Equações (6.25) e (6.26) segue que  $(a\delta_x - b\delta_y)(h(z_0)) = 0$ . Portanto, pelo Lema 4.4,  $h(z_0)$  é um ponto singular não degenerado de  $E$ .

Reciprocamente, suponha que  $h(z_0)$  é um ponto singular não degenerado de  $E$ . Então, pelo Lema 4.4 e a Equação (6.25),  $a(h(z_0)) \neq 0$ ,  $\delta_y(h(z_0)) \neq 0$  e  $(A\tilde{\delta}_x - B\tilde{\delta}_y)(z_0) = 0$ .

Vamos mostrar que  $A(z_0) \neq 0$ . De fato, suponha, por absurdo, que  $A(z_0) = 0$ . Então,  $B(z_0) =$

0. Pelo Lema 6.6,  $C(z_0) \neq 0$  e  $\hat{\delta}_y(z_0) \neq 0$ . De (6.26) e (6.27), temos:

$$(\xi \cdot a \circ h + \beta \cdot b \circ h)(z_0) = 0 \quad \text{e} \quad \tilde{\delta}_y = \xi \cdot \delta_y \circ h + \beta \cdot \delta_x \circ h.$$

Como  $(a\delta_x - b\delta_y)(h(z_0)) = 0$ , segue que  $\tilde{\delta}_y(z_0) = 0$ . Então,  $\hat{\delta}_y(z_0) = 0$ , o que é um absurdo.

Agora vamos mostrar que  $\hat{\delta}_y(z_0) \neq 0$ . De fato, suponha, por absurdo, que  $\hat{\delta}_y(z_0) = 0$ . Então,  $\tilde{\delta}_y(z_0) = 0$ . Como  $(a\delta_x - b\delta_y)(h(z_0)) = 0$ , segue que  $(\xi \cdot a \circ h + \beta \cdot b \circ h)(z_0) = 0$ . Usando a Equação (6.26), obtemos  $a(h(z_0)) \cdot A(z_0) = 0$ , o que é um absurdo.

Assim,  $A(z_0) \neq 0$ ,  $\hat{\delta}_y(z_0) \neq 0$  e pelo Lema 6.14, temos que  $(A\hat{\delta}_x - B\hat{\delta}_y)(z_0) = 0$ . Portanto, pelo Lema 4.4,  $z_0$  é um ponto singular não degenerado de  $L$ . ■

O lema a seguir mostra que  $K_\delta(h(z_0)) = K_{\hat{\delta}}(z_0)$ , onde  $z_0$  e  $h(z_0)$  são pontos singulares não degenerados de  $L$  e  $E$ .

**Lema 6.16.** *Seja 0 um valor regular dos campos  $V_1$  e  $V_2$ . Se  $z_0$  é um ponto singular não degenerado de  $L$ , então  $\text{ind}_{z_0}(\hat{\delta}, (A\hat{\delta}_x - B\hat{\delta}_y)A\hat{\delta}_y) = \text{ind}_{h(z_0)}(\delta, (a\delta_x - b\delta_y)a\delta_y)$ .*

**Demonstração:** Suponha que  $z_0$  é um ponto singular não degenerado de  $L$ . Então, pelos Lemas 4.4 e 6.15,  $A(z_0) \neq 0$ ,  $\hat{\delta}_y(z_0) \neq 0$  e  $h(z_0)$  é um ponto singular não degenerado de  $E$ . Segue do Lema 4.4 que  $(a \circ h)(z_0) \neq 0$ ,  $(\delta_y \circ h)(z_0) \neq 0$  e  $[(a \circ h)(\delta_x \circ h) - (b \circ h)(\delta_y \circ h)](z_0) = 0$ . Das Equações (6.26) e (6.27) segue que

$$\text{sign}[A(z_0)] = \text{sign}[(a \circ h)(z_0)] \quad (6.31)$$

$$\text{sign}[\tilde{\delta}_y(z_0)] = \text{sign}[(a \circ h)(z_0)(\delta_y \circ h)(z_0)(\xi \cdot a \circ h + \beta \cdot b \circ h)(z_0)] \quad (6.32)$$

Pela Equação (6.25), temos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (\xi\alpha - \beta\gamma)\beta(\delta_y \circ h) & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \circ h \\ (a\delta_x - b\delta_y) \circ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\delta} \\ (A\tilde{\delta}_x - B\tilde{\delta}_y)(a \circ h) \end{pmatrix},$$

onde  $J = [\xi\alpha - \beta\gamma][\xi \cdot a \circ h + \beta \cdot b \circ h]$ . Daí, pelo Teorema 2.1 segue que

$$\text{ind}_{z_0}(\tilde{\delta}, (A\tilde{\delta}_x - B\tilde{\delta}_y)(a \circ h)) = \text{sign}[(\xi \cdot a \circ h + \beta \cdot b \circ h)(z_0)] \text{ind}_{h(z_0)}(\delta, a\delta_x - b\delta_y).$$

Portanto, pelo Lema 6.14 e as Equação (6.31) e (6.32) ,

$$\begin{aligned} \text{ind}_{z_0}(\hat{\delta}, (A\hat{\delta}_x - B\hat{\delta}_y)A\hat{\delta}_y) &= \text{ind}_{z_0}(\tilde{\delta}, (A\tilde{\delta}_x - B\tilde{\delta}_y)A\tilde{\delta}_y) \\ &= \text{ind}_{h(z_0)}(\delta, (a\delta_x - b\delta_y)a\delta_y). \end{aligned}$$

■

**Lema 6.17.** *Se 0 é um zero isolado dos campos vetoriais  $(\hat{\delta}, \hat{\delta}_y)$  e  $(\hat{\delta}_x, \hat{\delta}_y)$ , então*

$$\text{ind}_0(\hat{\delta}\hat{\delta}_x, \hat{\delta}_y) = \text{ind}_0(\tilde{\delta}\tilde{\delta}_x, \tilde{\delta}_y) \quad e \quad \text{ind}_0(\hat{\delta}_x, \hat{\delta}_y) = \text{ind}_0(\tilde{\delta}_x, \tilde{\delta}_y).$$

**Demonstração:** Como  $\hat{\delta} = g \cdot \tilde{\delta}$ , a demonstração é análoga ao Lema 6.12. ■

**Teorema 6.18.** *Sejam  $(E, 0)$  e  $(L, 0)$  germes de EDB's equivalentes, da forma (6.22) e (6.20), respectivamente. Se 0 é um zero isolado dos campos vetoriais  $(\delta, a\delta_x - b\delta_y)$  e  $(\delta, \delta_y)$ , então  $I(E, 0) = I(L, 0)$ .*

**Demonstração:** Pelo Teorema 5.6, existem perturbações boas  $E_t$  e  $L_t$  de  $E$  e  $L$  dadas pelas Equações (6.28) e (6.29), tais que 0 é um valor regular dos campos vetoriais  $(\hat{\delta}, A_t\hat{\delta}_{t,x} - B_t\hat{\delta}_{t,y})$  e  $(\delta_t, a_t\delta_{t,x} - b_t\delta_{t,y})$ , para todo  $t$  perto do 0,  $t \neq 0$ , onde  $\delta_t = b_t^2 - a_t c_t$  e  $\hat{\delta}_t = (\det dh)^2 \cdot \delta_t \circ h$ . Denotamos por  $\tilde{\delta}_t = \delta_t \circ h$ . Então, pelo Lema 6.14 e o Teorema 2.2,

$$\begin{aligned} \text{ind}_0(\hat{\delta}, (A\hat{\delta}_x - B\hat{\delta}_y)A\hat{\delta}_y) &= \text{ind}_0(\tilde{\delta}, (A\tilde{\delta}_x - B\tilde{\delta}_y)A\tilde{\delta}_y) \\ &= \sum \text{ind}_{z_i}(\tilde{\delta}_t, (A_t\tilde{\delta}_{t,x} - B_t\tilde{\delta}_{t,y})A_t\tilde{\delta}_{t,y}), \end{aligned} \quad (6.33)$$

para  $t$  perto do zero,  $t \neq 0$ . Fixe um  $t$  perto do zero. Sejam  $C_1 = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid A_t(z) = 0\}$ ,  $C_2 = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid A_t(z) \neq 0\}$ ,  $C_3 = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \tilde{\delta}_t(z) = (A_t\tilde{\delta}_{t,x} - B_t\tilde{\delta}_{t,y})(z) = 0\}$  e  $C_4 = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \tilde{\delta}_t(z) = \tilde{\delta}_{t,y}(z) = 0\}$ . Então, (6.33) é igual a

$$\sum_{z_i \in C_1} \text{ind}_{z_i}(\tilde{\delta}_t, (A_t\tilde{\delta}_{t,x} - B_t\tilde{\delta}_{t,y})A_t\tilde{\delta}_{t,y}) + \sum_{z_i \in C_2} \text{ind}_{z_i}(\tilde{\delta}_t, (A_t\tilde{\delta}_{t,x} - B_t\tilde{\delta}_{t,y})A_t\tilde{\delta}_{t,y}). \quad (6.34)$$

Pelos Lemas 6.14, 6.6 e Teorema 2.2,

$$\begin{aligned} \sum_{z_i \in C_1} \text{ind}_{z_i}(\tilde{\delta}_t, (A_t \tilde{\delta}_{t,x} - B_t \tilde{\delta}_{t,y}) A_t \tilde{\delta}_{t,y}) &= \sum \text{ind}_{z_i}(A_t, B_t) \\ &= \text{ind}_0(A, B). \end{aligned} \quad (6.35)$$

Do lema 4.4, temos,  $(C_2 \cap C_3) \cap (C_2 \cap C_4) = \emptyset$ . Assim, o segundo somando de (6.34) é igual a

$$\sum_{z_i \in C_2 \cap C_3} \text{ind}_{z_i}(\tilde{\delta}_t, (A_t \tilde{\delta}_{t,x} - B_t \tilde{\delta}_{t,y}) A_t \tilde{\delta}_{t,y}) + \sum_{z_i \in C_2 \cap C_4} \text{ind}_{z_i}(\tilde{\delta}_t, (A_t \tilde{\delta}_{t,x} - B_t \tilde{\delta}_{t,y}) A_t \tilde{\delta}_{t,y}).$$

Pelos Lemas 6.14, 6.15 e 6.16,

$$\begin{aligned} \sum_{z_i \in C_2 \cap C_3} \text{ind}_{z_i}(\tilde{\delta}_t, (A_t \tilde{\delta}_{t,x} - B_t \tilde{\delta}_{t,y}) A_t \tilde{\delta}_{t,y}) &= \sum \text{ind}_{h(z_i)}(\delta_t, (a_t \delta_{t,x} - b_t \delta_{t,y}) a_t \delta_{t,y}) \\ &= \sum 2[T_{\delta_t}(h(z_i))]. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Segue do Lema 4.4 que

$$\sum_{z_i \in C_2 \cap C_4} \text{ind}_{z_i}(\tilde{\delta}_t, (A_t \tilde{\delta}_{t,x} - B_t \tilde{\delta}_{t,y}) A_t \tilde{\delta}_{t,y}) = \sum \text{sign}[\tilde{\delta}_{t,x}(z_i)] \text{ind}_{z_i}(\tilde{\delta}_t, \tilde{\delta}_{t,y}). \quad (6.37)$$

De (6.36) e (6.37) temos que:

$$\sum_{z_i \in C_2} \text{ind}_{z_i}(\tilde{\delta}_t, (A_t \tilde{\delta}_{t,x} - B_t \tilde{\delta}_{t,y}) A_t \tilde{\delta}_{t,y}) = \sum 2[T_{\delta_t}(h(z_i))] + \sum \text{sign}[\tilde{\delta}_{t,x}(z_i)] \text{ind}_{z_i}(\tilde{\delta}_t, \tilde{\delta}_{t,y}). \quad (6.38)$$

Por (6.34), (6.35) e (6.38) temos,

$$\text{ind}_0(\hat{\delta}, (A \hat{\delta}_x - B \hat{\delta}_y) A \hat{\delta}_y) = \text{ind}_0(A, B) + \sum 2[T_{\delta_t}(h(z_i))] + \sum \text{sign}[\tilde{\delta}_{t,x}(z_i)] \text{ind}_{z_i}(\tilde{\delta}_t, \tilde{\delta}_{t,y}).$$

Fazendo cálculos simples e usando o Lema 4.4 obtemos,

$$\begin{aligned} \text{ind}_0(\tilde{\delta} \tilde{\delta}_x, \tilde{\delta}_y) - \text{ind}_0(\tilde{\delta}_x, \tilde{\delta}_y) &= \sum \text{sign}[\tilde{\delta}_{t,x}(z_i)] \text{ind}_{z_i}(\tilde{\delta}_t, \tilde{\delta}_{t,y}) - 2 \sum_{\tilde{\delta}_t(z_i) < 0} \text{ind}_{z_i}(\tilde{\delta}_{t,x}, \tilde{\delta}_{t,y}) \\ \sum_{\delta_t(h(z_i)) < 0} \text{ind}_{h(z_i)}(\delta_{t,x}, \delta_{t,y}) &= \sum_{\tilde{\delta}_t(z_i) < 0} \text{ind}_{z_i}(\tilde{\delta}_{t,x}, \tilde{\delta}_{t,y}). \end{aligned}$$

Segue das duas igualdades anteriores que

$$\text{ind}_0(\hat{\delta}, (A\hat{\delta}_x - B\hat{\delta}_y)A\hat{\delta}_y) = 2I(E, 0) + \text{ind}_0(A, B) + \text{ind}_0(\tilde{\delta}\tilde{\delta}_x, \tilde{\delta}_y) - \text{ind}_0(\tilde{\delta}_x, \tilde{\delta}_y),$$

Assim,

$$I(E, 0) = \frac{1}{2}\text{ind}_0(\hat{\delta}, (A\hat{\delta}_x - B\hat{\delta}_y)A\hat{\delta}_y) - \frac{1}{2}\text{ind}_0(A, B) - \frac{1}{2}\text{ind}_0(\tilde{\delta}\tilde{\delta}_x, \tilde{\delta}_y) + \frac{1}{2}\text{ind}_0(\tilde{\delta}_x, \tilde{\delta}_y),$$

e portanto, pelo Lema 6.17 e Teorema 6.8,  $I(E, 0) = I(L, 0)$ . ■

### 6.3 Índice de EDB's com coeficientes suaves

Nesta seção mostramos que as fórmulas para o índice determinadas no Teorema 6.8 podem ser estendidas para equações diferenciais binárias com coeficientes suaves que satisfazem a uma condição de finitude, o que permite introduzir o conceito de índice para esta classe de equações.

Seja  $(E, 0)$  um germe de uma EDB dada por

$$E(x, y)[dx, dy] = a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 = 0, \quad (6.39)$$

com coeficientes  $a, b, c$  suaves. Seja  $\delta = b^2 - ac$  a função discriminante de  $E$ .

**Definição 6.19.** Dizemos que o germe  $(E, 0)$  é finito se  $m(\delta, a\delta_x - b\delta_y) < \infty$ ,  $m(\delta_x, \delta_y) < \infty$  e  $m(\delta, \delta_y) < \infty$ .

Indicaremos por  $V_1 = (\delta, (a\delta_x - b\delta_y)a\delta_y)$ ,  $V_2 = (\delta_x, \delta_y)$  e  $V_3 = (\delta\delta_x, \delta_y)$ . Vamos indicar por  $\mathcal{F}$  o conjunto de todas as EDB's finitas. Quando  $(E, 0) \in \mathcal{F}$ , os campos  $V_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , são  $\mathcal{H}$ -finitamente determinados e têm, portanto, singularidade isolada na origem. Mostraremos a seguir que  $\mathcal{F}$  acontece em geral. Lembremos que uma propriedade acontece em geral se o complementar do subconjunto formado pelos elementos que satisfazem  $\mathcal{P}$  é um conjunto pró-algébrico de codimensão infinita (ver pagina 4).

**Proposição 6.20.** *O conjunto das EDB's finitas acontece em geral.*

**Demonstração:** Usando o Teorema 5.1 e o argumento da demonstração do Teorema 2.8 em [7], segue o resultado. ■

Para equações diferenciais binárias em  $\mathcal{F}$  podemos definir:

**Definição 6.21.** Para  $(E, 0) \in \mathcal{F}$ , definimos:

$$J(E, 0) = \frac{1}{2} \text{ind}_0(\delta, (a\delta_x - b\delta_y)a\delta_y) - \frac{1}{2} \text{ind}_0(a, b) - \frac{1}{2} \text{ind}_0(\delta\delta_x, \delta_y) + \frac{1}{2} \text{ind}_0(\delta_x, \delta_y).$$

Seja  $(E_r, 0)$  um germe de uma EDB dada por

$$E_r(x, y)[dx, dy] = a_r(x, y)dy^2 + 2b_r(x, y)dxdy + c_r(x, y)dx^2 = 0, \quad (6.40)$$

onde  $a_r(x, y)$ ,  $b_r(x, y)$  e  $c_r(x, y)$  são os  $r$ -jatos de  $a$ ,  $b$  e  $c$  em  $(0, 0)$ . Seja  $\delta_r = b_r^2 - a_r c_r$  a função discriminante de  $E_r$ .

**Proposição 6.22.** Se  $(E, 0) \in \mathcal{F}$ . Então, existe um  $r > 0$  tal que,  $J(E, 0) = J(E_r, 0)$ .

**Demonstração:** Seja  $(E, 0)$  um germe de uma EDB finita. Então, existe um inteiro positivo  $k$  tal que  $m_2^k \subset V_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Logo, para  $r$  suficientemente grande temos:  $j^k V_2 = j^k(\delta_{rx}, \delta_{ry})$ ,  $j^k V_1 = j^k(\delta_r, (a_r \delta_{rx} - b_r \delta_{ry})a_r \delta_{ry})$  e  $j^k V_3 = j^k(\delta_r \delta_{rx}, \delta_{ry})$ . Portanto, segue do Teorema 2.5 que

$$J(E, 0) = \frac{1}{2} \text{ind}_0(\delta_r, (a_r \delta_{rx} - b_r \delta_{ry})a_r \delta_{ry}) - \frac{1}{2} \text{ind}_0(a_r, b_r) - \frac{1}{2} \text{ind}_0(\delta_r \delta_{rx}, \delta_{ry}) + \frac{1}{2} \text{ind}_0(\delta_{rx}, \delta_{ry}).$$

■

Segue da proposição anterior que o invariante  $J(E, 0)$  coincide com o índice definido anteriormente quando os coeficientes são analíticos.

**Observação.** Os resultados desta seção podem ser estendidas para a classe mais ampla das EDB's tais que os campos vetoriais  $V_1$ ,  $V_2$  e  $V_3$  satisfazem a condição de Lojasiewicz, isto é, existem constantes positivas  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$  tais que

$$\|V_i(x, y)\| \geq c_i \|(x, y)\|^{\alpha_i},$$

para  $i \in \{1, 2, 3\}$ , numa vizinhança da origem.

## 6.4 Invariância do $J(E, 0)$

Nesta seção provaremos que  $J(E, 0)$  é invariante por equivalência para equações dife-renciais binárias com coeficientes suaves.

O Teorema a seguir fornece uma desigualdade tipo Lojasiewicz.

**Teorema 6.23.** *Seja  $\delta : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$  um germe de função suave tal que  $m(\delta_x, \delta_y) < \infty$ . Então, existem uma vizinhança  $U$  de 0 em  $\mathbb{R}^2$  e uma função suave  $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$  tais que, para todo  $x \in U$*

$$\|\nabla\delta(x, y)\| \cdot |f(x, y)| \geq c|\delta(x, y)|^\rho,$$

onde  $0 < \rho < 1$  e  $c > 0$ .

**Demonstração:** Da hipótese que  $m(\delta_x, \delta_y) < \infty$ , segue que existe um germe de difeomorfismo suave  $h = (h_1, h_2) : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  tal que  $\delta \circ h$  é um polinômio. Pela desigualdade de Lojasiewicz 6.7, existe uma vizinhança  $V$  de 0 em  $\mathbb{R}^2$  tal que, para todo  $(x, y) \in V$

$$\|\nabla(\delta \circ h)(x, y)\| \geq c|(\delta \circ h)(x, y)|^\rho, \quad (6.41)$$

onde  $0 < \rho < 1$  e  $c > 0$ .

Calculando o gradiente da função  $\delta \circ h$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \nabla(\delta \circ h) &= (\delta_x \circ h \cdot h_{1x} + \delta_y \circ h \cdot h_{2x}, \delta_x \circ h \cdot h_{1y} + \delta_y \circ h \cdot h_{2y}) \\ &= (\langle (h_{1x}, h_{2x}), \nabla\delta \circ h \rangle, \langle (h_{1y}, h_{2y}), \nabla\delta \circ h \rangle), \end{aligned} \quad (6.42)$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota o produto interno em  $\mathbb{R}^2$ .

Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\|(h_{1x}, h_{2x})\| \cdot \|\nabla\delta \circ h\| \geq |\langle (h_{1x}, h_{2x}), \nabla\delta \circ h \rangle| \quad (6.43)$$

$$\|(h_{1y}, h_{2y})\| \cdot \|\nabla\delta \circ h\| \geq |\langle (h_{1y}, h_{2y}), \nabla\delta \circ h \rangle|. \quad (6.44)$$

De (6.42), (6.43) e (6.44) temos que:

$$\sqrt{(\|(h_{1x}, h_{2x})\|^2 + \|(h_{1y}, h_{2y})\|^2)} \cdot \|\nabla \delta \circ h\| \geq \|\nabla(\delta \circ h)\|. \quad (6.45)$$

Segue de (6.41) que

$$\sqrt{\|(h_{1x}, h_{2x})(x, y)\|^2 + \|(h_{1y}, h_{2y})(x, y)\|^2} \cdot \|\nabla \delta(h(x, y))\| \geq c|\delta(h(x, y))|^p,$$

para todo  $(x, y) \in V$ . Considerando  $f = \sqrt{(\|(h_{1x}, h_{2x})\|^2 + \|(h_{1y}, h_{2y})\|^2)} \circ h^{-1}$  e  $U = h(V)$ , o resultado segue. ■

Sejam  $(E, 0)$  e  $(L, 0)$  germes de EDB's finitas dadas por

$$\begin{aligned} E(x, y)[dx, dy] &= a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 = 0, \\ L(x, y)[dx, dy] &= A(x, y)dy^2 + 2B(x, y)dxdy + C(x, y)dx^2 = 0, \end{aligned} \quad (6.46)$$

tais que  $a, b, c, A, B$  e  $C$  são funções suaves. Seja  $\delta = b^2 - ac$ .

Usando o Teorema 5.8, temos que existem uma sequência  $\{t_m\}$  de  $\mathbb{R}$  convergindo para 0 e uma perturbação  $E_t$  de  $(E, 0)$  tal que  $E_{t_m} \in \Theta$ , para todo  $t_m$  perto do zero.

Então, fixando um  $t_m$  perto do zero e usando o mesmo argumento da demonstração do Teorema 6.8, temos

$$J(E, 0) = \sum_i K_{\delta_{t_m}}(z_i) + \sum_{\delta_{t_m}(u_i) < 0} \text{ind}_{u_i}(\delta_{t_m x}, \delta_{t_m y}), \quad (6.47)$$

onde  $z_i$  são pontos singulares não degenerados de  $E_{t_m}$  e  $u_i$  pontos críticos de  $\delta_{t_m}$ , respectivamente.

Observe que os Lemas 6.11 e 6.12 podem ser generalizados para as EDB's finitas, usando a desigualdade do Teorema 6.23. O Teorema 6.18 também pode ser generalizado para as EDB's finitas, usando a Equação 6.47 e a perturbação dada no Teorema 5.9. Portanto, temos:

**Teorema 6.24.** *Sejam  $(E, 0)$  e  $(L, 0)$  germes de EDB's finitas. Se  $(E, 0)$  e  $(L, 0)$  são equivalentes, então  $J(E, 0) = J(L, 0)$ .*

## Equações diferenciais implícitas com

$$F_{pp}(0) \neq 0$$

Neste capítulo definimos um índice para EDI's analíticas reais quando  $F_{pp} \neq 0$  em um ponto singular isolado e mostramos que este índice pode ser expresso em termos do índice da 1-forma  $\omega = dy - p dx$  e do índice do gradiente de  $F$ . Na seção 7.2 são estudados os pontos singulares e as perturbações boas de um tipo especial de EDI, usando a Teoria de Singularidades.

O seguinte resultado será usado na demonstração do Lema 7.3. Seja  $A$  um subespaço topológico de  $\mathbb{R}^n$ . Então, indicaremos por  $\chi(A)$  a característica de Euler de  $A$ . Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função analítica real tal que  $f(0) = 0$  e  $V_\varepsilon = f^{-1}(\varepsilon) \cap B_r$ , onde  $B_r$  é uma bola fechada de centro 0 e raio  $r$  em  $\mathbb{R}^n$ . O teorema a seguir relaciona o índice do campo gradiente  $\nabla f$  na origem, com a característica de Euler das fibras  $f^{-1}(\varepsilon)$  numa vizinhança da origem.

**Teorema 7.1.** ([40]) *Seja 0 um ponto crítico isolado de  $f$ . Então:*

(i) *Se  $\varepsilon > 0$ , então  $\chi(V_\varepsilon) = 1 + (-1)^{n+1} \text{ind}_0 \nabla f$ .*

(ii) *Se  $\varepsilon < 0$ , então  $\chi(V_\varepsilon) = 1 - \text{ind}_0 \nabla f$ .*

### 7.1 Índice de uma EDI quando $F_{pp}(0) \neq 0$

Seja  $(F, 0)$  um germe de uma EDI com  $F_p(0) = 0$  e  $F_{pp}(0) \neq 0$ , dada por

$$F(x, y, p) = 0, \tag{7.1}$$

onde  $p = \frac{dy}{dx}$  e  $F$  é uma função analítica real de  $\mathbb{R}^3$  em  $\mathbb{R}$ . Então, usando o Teorema da Divisão, temos

$$F(x, y, p) = a(x, y)p^2 + 2b(x, y)p + c(x, y), \quad (7.2)$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são funções analíticas reais e  $a(0, 0) \neq 0$ . Neste caso, usando o teorema 6.9, definimos o índice da EDI por

$$I(F, 0) = \frac{1}{2} \text{ind}_0(\delta \delta_y, aa\delta_x - ab\delta_y) + \frac{1}{2} \text{ind}_0(\delta_x, \delta_y),$$

onde  $\delta = b^2 - ac$ .

Vamos mostrar que os índices dos campos vetoriais  $(\delta \delta_y, aa\delta_x - ab\delta_y)$  e  $(\delta_x, \delta_y)$  em 0 podem ser expressos em termos de índices de campos vetoriais em  $\mathbb{R}^3$  que só dependem de  $F$ .

Sejam  $\omega = dy - p dx$  a 1-forma definida em  $\mathbb{R}^3$  e  $M = F^{-1}(0)$ . A 1-forma  $\omega$  induz uma 1-forma  $\omega|_M$  em  $M$ . Seja  $S = (F, F_p, F_x + pF_y)$  o campo vetorial definido em  $\mathbb{R}^3$ .

**Lema 7.2.** *Seja  $q_0$  um zero isolado do campo vetorial  $S$ . Se  $q_0$  é um zero não degenerado do campo vetorial  $S$ , então  $i_{q_0}(\omega|_M) = \text{sign}[F_y(q_0)] \cdot \text{ind}_{q_0} S$ .*

**Demonstração:** Seja  $q_0$  um zero não degenerado do campo vetorial  $S$ . Então,  $F_y(q_0) \neq 0$ . Logo  $M$  é suave numa vizinhança de  $q_0$  e pelo Teorema 3.3,  $q_0$  é um zero da  $\omega|_M$ . Pelo Teorema da Função Implícita, existe uma função  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $F(x, \varphi(x, p), p) = 0$ . A função,  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definida por  $h(x, p) = (x, \varphi(x, p), p)$  é uma carta suave da superfície  $M$ , logo o pull-back da 1-forma  $\omega$  pela função  $h$  é

$$h^* \omega|_M(x, p)(u, v) = \left( \frac{-F_x(h(x, p)) - pF_y(h(x, p))}{F_y(h(x, p))} \right) u + \frac{-F_p(h(x, p))}{F_y(h(x, p))} v.$$

Assim,

$$\begin{aligned} i_0(\omega|_M) &= \text{ind}_0 \left( \frac{-F_x \circ h - pF_y \circ h}{F_y \circ h}, \frac{-F_p \circ h}{F_y \circ h} \right) \\ &= \text{ind}_0(F_p \circ h, -F_x \circ h - pF_y \circ h). \end{aligned}$$

Seja  $g(x, p) = (F_p \circ h, -F_x \circ h - pF_y \circ h)$ . Portanto, pela Equação (4.12), o resultado segue. ■

**Lema 7.3.** *Seja 0 um zero isolado da  $\omega|_M$ . Então,  $i_0(\omega|_M) = \text{ind}_0(F F_y, F_p, F_x + pF_y)$ .*

**Demonstração:** Seja 0 um zero isolado da  $\omega|_M$ . Então, pelo Teorema 3.3, 0 é um zero isolado do campo vetorial  $(F, F_p, F_x + pF_y)$ .

Seja  $(FF_y - \varepsilon F_y, F_p, F_x + pF_y)$  uma perturbação do campo vetorial  $(FF_y, F_p, F_x + pF_y)$ . Então, pelo Teorema 2.2,

$$\begin{aligned} \text{ind}_0(FF_y, F_p, F_x + pF_y) &= \sum \text{ind}_{q_i}(FF_y - \varepsilon F_y, F_p, F_x + pF_y) \\ &= \sum_{q_i \in V_\varepsilon} \text{sign}[F_y(q_i)] \text{ind}_{q_i}(F - \varepsilon, F_p, F_x + pF_y) - \text{sign}[\varepsilon] \text{ind}_0 \nabla F. \end{aligned}$$

Fixe um  $\varepsilon < 0$  perto do zero. Então, pelo Lema 7.2,

$$i_{q_i}(\omega|_{V_\varepsilon}) = \text{sign}[F_y(q_i)] \cdot \text{ind}_{q_i}(F - \varepsilon, F_p, F_x + pF_y),$$

para todo  $q_i \in V_\varepsilon$ . Do Teorema 7.1,

$$\text{ind}_0(FF_y, F_p, F_x + pF_y) = \sum_{q_i \in V_\varepsilon} i_{q_i}(\omega|_{V_\varepsilon}) - \chi(V_\varepsilon) + 1.$$

Portanto, pela Proposição 2.22,

$$i_0(\omega|_M) = \text{ind}_0(FF_y, F_p, F_x + pF_y).$$

■

Como  $F_{pp}(0) \neq 0$ , então  $a(0,0) \neq 0$ . Logo, multiplicando a Equação (7.2) por  $-\frac{1}{a}$  temos

$$G(x, y, p) = -p^2 + 2B(x, y)p + C(x, y), \quad (7.3)$$

onde  $B(x, y) = -\frac{b(x, y)}{a(x, y)}$ ,  $C(x, y) = -\frac{c(x, y)}{a(x, y)}$  e  $G = -\frac{1}{a}F$ . Seja  $\delta^*(x, y) = B^2(x, y) + C(x, y)$  o discriminante de G, então

$$G(x, y, p) = -G_p^2(x, y) + \delta^*(x, y).$$

Nesta nova EDB o fato importante é a correspondência dos sinais de  $\delta^*$  com o sinais de G, em pontos fora do discriminante, isto é,  $\text{sign}[\delta^*(x_0, y_0)] = \text{sign}[G(x_0, y_0, p_0)]$ , onde  $B(x_0, y_0) = p_0$ , e ainda pelo Teorema 6.13,  $I(G, 0) = I(F, 0)$ .

**Lema 7.4.** *Seja  $q_0 = (x_0, y_0, p_0)$  um ponto singular da EDI (7.3).*

(i) *Se  $q_0$  é um zero não degenerado do campo vetorial  $(\delta^*, \delta_x^* + B\delta_y^*)$ , então*

$$\text{ind}_{q_0}(GG_y, G_p, G_x + pG_y) = 2[T_{\delta^*}(x_0, y_0)].$$

(ii) *Se  $q_0$  é um zero não degenerado do campo vetorial  $(\delta_x^*, \delta_y^*)$ , então*

$$\text{ind}_{q_0} \nabla G = -\text{ind}_{(x_0, y_0)}(\delta_x^*, \delta_y^*).$$

**Demonstração:** A demonstração segue usando as Equações (4.7) e (4.8). ■

Dada uma equação da forma 7.3 sempre é possível achar uma perturbação de  $G$ , da forma

$$G_t(x, y, [dx, dy]) = -dy^2 + 2B_t(x, y)dydx + C_t(x, y)dx^2,$$

tal que 0 é um valor regular do campo vetorial  $(\delta_t^*, \delta_x^* + B_t\delta_y^*)$ , para todo  $t$  perto do zero, onde  $\delta_t^*(x, y) = (B_t^2 + C_t)(x, y)$ , isto é,  $G_t$  é uma perturbação boa de  $G$ .

**Teorema 7.5.** *Seja  $a(0, 0) \neq 0$  e 0 um zero isolado do campo vetorial  $(\delta, a\delta_x - b\delta_y)$ . Então,*

$$I(F, 0) = \frac{1}{2}\text{Ind}_0(GG_y, G_p, G_x + pG_y) - \frac{1}{2}\text{Ind}_0 \nabla G.$$

**Demonstração:** Seja  $G_t$  uma perturbação boa de  $G$  tal que 0 seja um valor regular do campo vetorial  $(\delta_t^*, \delta_x^* + B_t\delta_y^*)$ . Então, pelo Teorema 2.2,

$$\text{Ind}_0(GG_y, G_p, G_x + pG_y) = \sum \text{ind}_{q_i}(G_t G_{ty}, G_{tp}, G_{tx} + pG_{ty}). \quad (7.4)$$

Segue do Lema 4.4 que (7.4) é igual a

$$\sum_{G_t(q_i)=0} \text{ind}_{q_i}(G_t G_{ty}, G_{tp}, G_{tx} + pG_{ty}) + \sum_{G_{ty}(q_i)=0} \text{ind}_{q_i}(G_t G_{ty}, G_{tp}, G_{tx} + pG_{ty}) \quad (7.5)$$

Por outro lado,

$$\sum_{G_t(q_i)=0} \text{ind}_{q_i}(G_t G_{t_y}, G_{t_p}, G_{t_x} + pG_{t_y}) = \sum_{G_t(q_i)>0} \text{ind}_{q_i} \nabla G_t - \sum_{G_t(q_i)<0} \text{ind}_{q_i} \nabla G_t.$$

Assim,  $\text{Ind}_0(GG_y, G_p, G_x + pG_y) - \text{Ind}_0 \nabla G$  é igual a

$$\sum_{G_t(q_i)=0} \text{ind}_{q_i}(G_t G_{t_y}, G_{t_p}, G_{t_x} + pG_{t_y}) - 2 \sum_{G_t(q_i)<0} \text{ind}_{q_i} \nabla G_t.$$

Portanto, pelo Lema 7.4,

$$I(F, 0) = \frac{1}{2} \text{Ind}_0(GG_y, G_p, G_x + pG_y) - \frac{1}{2} \text{Ind}_0 \nabla G.$$

■

**Teorema 7.6.** *Seja  $a(0,0) \neq 0$  e  $0$  um zero isolado do campo vetorial  $(\delta, a\delta_x - b\delta_y)$ . Então,*

$$I(F, 0) = \text{sign}[F_{pp}(0)] \cdot \frac{1}{2} \text{Ind}_0 \nabla F + \frac{1}{2} i_0 \omega_M.$$

**Demonstração:** Seja  $g = -\frac{1}{a}$ . Como  $G = gF$ , então

$$\begin{aligned} (GG_y, G_p, G_x + pG_y) &= (gg_y F^2 + g^2 F F_y, gF_p, [g_x + pg_y]F + g[F_x + pF_y]) \\ (G_x, G_y, G_p) &= (g_x F + gF_x, g_y F + gF_y, gF_p). \end{aligned}$$

Considere as seguintes homotopias  $H, H_1 : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$  dadas por

$$\begin{aligned} H(q, t) &= (tgg_y F^2 + g^2 F F_y, gF_p, t[g_x + pg_y]F + g[F_x + pF_y])(q, t) \\ H_1(q, t) &= (tg_x F + gF_x, tgy F + gF_y, gF_p)(q, t). \end{aligned}$$

tais que  $H(q, 0) = (g^2 F F_y, gF_p, g[F_x + pF_y])(q)$  e  $H_1(q, 0) = (gF_x, gF_y, gF_p)(q)$ .

Repetindo o mesmo argumento da demonstração do Lema 6.12, temos que existe um aberto  $U$  de  $0$  em  $\mathbb{R}^3$  tal que, para todo  $q \in U - \{0\}$  e  $t \in [0, 1]$ ,  $H(q, t) \neq 0$  e  $H_1(q, t) \neq 0$ . Então, pelo

Teorema 2.1,

$$\text{Ind}_0(FF_y, F_p, F_x + pF_y) = \text{Ind}_0(GG_y, G_p, G_x + pG_y) \quad \text{e} \quad \text{Ind}_0(gF_x, gF_y, gF_p) = \text{Ind}_0 \nabla G.$$

Portanto, pelo Corolário 7.3 e o Teorema 7.5,  $I(F, 0) = \text{sign} [F_{pp}(0)] \cdot \frac{1}{2} \text{Ind}_0 \nabla F + \frac{1}{2} i_0 \omega_{|M}$ . ■

É claro, pelo Teorema 6.18, que  $I(F, 0)$  é invariante por difeomorfismos suaves no conjunto de todas as equações diferenciais implícitas com  $F_{pp}(0) \neq 0$ .

Seja  $\xi = (F_p, pF_p, -F_x - pF_y)$  um campo vetorial definido em  $\mathbb{R}^3$ , o qual define um campo vetorial  $\xi|_M$  em  $M$  dado pela restrição de  $\xi$  em  $M$ . Seja  $\eta = F_p dx + pF_p dy - (F_x + pF_y) dp$  uma 1-forma definida em  $\mathbb{R}^3$  e considere  $\eta|_M$  a restrição da 1-forma  $\eta$  em  $M$ .

Os resultados dos Lemas 7.2 e 7.3 também são verdadeiros para a 1-forma  $\eta|_M$ . Logo, se 0 é um zero isolado da 1-forma  $\eta|_M$  em  $M$ , então  $i_0(\eta|_M) = i_0(\omega|_M)$ .

**Teorema 7.7.** *Seja 0 um zero isolado do campo vetorial  $\xi|_M$  em  $M$ , então  $\text{ind}_0 \xi|_M = i_0(\omega|_M)$ .*

**Demonstração:** Usando o Proposição 2.23,  $\text{ind}_0 \xi|_M = i_0(\eta|_M)$ . Portanto,  $\text{ind}_0 \xi|_M = i_0(\omega|_M)$ . ■

Pelo teorema acima, obtemos que

$$I(F, 0) = \text{sign} [F_{pp}(0)] \cdot \frac{1}{2} \text{Ind}_0 \nabla F + \frac{1}{2} \text{ind}_0 \xi|_M.$$

## 7.2 A equação $dy^2 - \delta(x, y)dx^2 = 0$

Um germe de equação diferencial implícita  $(F, 0)$  tal que  $F_{pp}(0) \neq 0$  é equivalente, (ver [9], proposição 3.2), à equação

$$E(x, y)[dx, dy] = dy^2 - \delta(x, y)dx^2 = 0. \quad (7.6)$$

Ou, equivalentemente, qualquer equação diferencial binária para a qual nem todos os coeficientes são nulos na origem reduz-se à forma normal (7.6). Para estudar equações diferenciais binárias dadas na forma (7.6) é possível utilizar métodos da Teoria de Singularidades para interpretar os resultados obtidos anteriormente, em termos das singularidades da função  $\delta$  com relação a uma classe de equivalência conveniente.

Seja  $\mathcal{K}$  o grupo de contato que age no gráfico de germes de funções  $\delta : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$ . Indicaremos por  $\mathcal{K}^*$  o subgrupo geométrico do grupo de contato  $\mathcal{K}$  formado pelos germes de difeomorfismos  $H : (\mathbb{R}^3, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$  tais que  $H(x, y, z) = (h(x, y), \theta(x, y, z))$ , onde  $\theta(x, y, 0) = 0$  e  $h : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  é um germe de difeomorfismo tal que  $h(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y))$ , (Note que  $\mathcal{K}^*$  coincide com o grupo de bifurcação [27]).

O espaço tangente de  $\mathcal{K}^*$  em  $\delta$  é o conjunto

$$T(\delta) = \{a\delta + b\delta_x + c\delta_y \mid a, b \in \mathcal{E}_2 \text{ e } c \in \mathcal{E}_2 \text{ não depende de } x\}.$$

A  $\mathcal{K}^*$ -codimensão de  $\delta$ , denotada por  $\mathcal{K}^*\text{-cod}(\delta)$  é definida por  $\mathcal{K}^*\text{-cod}(\delta) = \dim \frac{\mathcal{E}_2}{T(\delta)}$ . Quando  $\mathcal{K}^*\text{-cod}(\delta) < \infty$ , dizemos que  $\delta$  tem  $\mathcal{K}^*$ -codimensão finita. Como  $\mathcal{K}^*$  é um subgrupo geométrico, as teorias de determinação finita e desdobramento versal se verificam para  $\mathcal{K}^*$  (ver [17]).

Observemos que se  $\delta : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$  é um germe de uma função analítica real tal que  $\delta(0) = \delta_x(0) = 0$ , então  $\delta$  é  $\mathcal{K}^*$ -estável se, e somente se  $\delta_{xx}(0) \neq 0$  e  $\delta_y \neq 0$  (ver [27]).

**Proposição 7.8.** *Seja  $(E, 0)$  dada pela Equação (7.6). Então,  $0$  é um ponto singular não degenerado de  $E$  se, e somente se,  $\delta(0) = \delta_x(0) = 0$  e  $\delta$  é  $\mathcal{K}^*$ -estável.*

Seja  $\delta : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$  um germe analítico real tal que a  $\mathcal{K}^*$ -codimensão de  $\delta$  é finita e seja

$$\begin{aligned} D : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^s, 0) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, u) &\longmapsto D(x, y, u), \end{aligned}$$

$D(x, y, 0) = \delta(x, y)$ , uma  $\mathcal{K}^*$ -deformação versal de  $\delta$ . Indicaremos também por  $D$  um representante de  $D$  definido em uma vizinhança  $W \times U$ , onde  $W$  é vizinhança de  $0$  em  $\mathbb{R}^2$  e  $U$  é vizinhança de  $0$  em  $\mathbb{R}^s$ . O conjunto de bifurcação de  $D$  é o conjunto

$$B = \{u \in U \mid D_u : W \longrightarrow \mathbb{R}, D_u(x, y) = D(x, y, u), \text{ não é } \mathcal{K}^*\text{-estável}\}.$$

$B$  é um conjunto analítico próprio de  $\mathbb{R}^s$  e o seu complementar tem um número finito de componentes conexas. Se  $u \in \mathbb{R}^s - B$ , então  $D_u$  é estável. Qualquer caminho  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^s$  tal que  $\alpha_t \in \mathbb{R}^s - B$ ,  $t \neq 0$ , corresponde a uma perturbação boa da EDB (7.6), pois para todo  $t \neq 0$ ,

as únicas singularidades  $\mathcal{H}^*$ -estáveis de  $\delta$  são pontos singulares não degenerados de  $E$ .

Sejam  $(E, 0)$  uma EDB dada pela Equação (7.6) e 0 um zero isolado do campo vetorial  $(\delta, \delta_x)$ . Então, pelo Teorema 6.9, o índice da EDB  $(E, 0)$  é dado por

$$I(E, 0) = \frac{1}{2} \text{ind}_0(\delta\delta_y, \delta_x) + \frac{1}{2} \text{ind}_0(\delta_x, \delta_y).$$

Como o número  $I(E, 0)$  só depende do germe  $\delta$ , então indicaremos  $I(E, 0)$  por  $I(\delta, 0)$ .

**Proposição 7.9.** *Seja  $\delta_1 : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ , um germe analítico real. Se  $\delta$  e  $\delta_1$  são  $\mathcal{H}^*$ -equivalentes, então  $I(\delta, 0) = I(\delta_1, 0)$ .*

**Demonstração:** A demonstração segue do Teorema 6.18. ■

A seguinte tabela mostra as formas normais de germes suaves  $\delta : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{H}^*$ -simples (classificados em [33]). Completamos a tabela calculando os índices das formas normais.

Forma normal de $\delta$	k	$I(\delta, 0)$
$\pm x^3 \pm y^2$		0
$x^k \pm y$ $k \geq 2$	par ímpar	$-\frac{1}{2}$ 0
$-x^k \pm y$ $k \geq 2$	par ímpar	$\frac{1}{2}$ 0
$x^2 + y^k$ $k \geq 2$	par ímpar	0 $-\frac{1}{2}$
$x^2 - y^k$ $k \geq 2$	par ímpar	-1 $-\frac{1}{2}$
$-x^2 + y^k$ $k \geq 2$	par ímpar	0 $\frac{1}{2}$
$-x^2 - y^k$ $k \geq 2$	par ímpar	1 $\frac{1}{2}$
$x^k \pm xy$ $k \geq 3$	par ímpar	-1 $-\frac{1}{2}$
$-x^k \pm xy$ $k \geq 3$	par ímpar	0 $-\frac{1}{2}$

Tabela 7.1: Formas normais  $\mathcal{H}^*$ -simples

# Referências Bibliográficas

---

- [1] V. I. Arnold, *Geometrical Methodos in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer, Berlin, (1983).
- [2] M.A. Aguilar, J.A. Seade and A. Verjovsky, *Indices of vector field and topological Invariants of real analytic singularities* J. Reine Angew. Math **504**, (1998), 159-176.
- [3] R. Benedetti, J.J. Risler, *Real algebraic and semialgebraic sets*, ActuaIités Mathématiques, Hermann, Éditeurs Des Sciences et des Art (1990).
- [4] J. Bochnak, M. Coste, M.-F. Roy, *Real algebraic geometry*, Springer-Verlag, Berlin (1998).
- [5] J. W. Bruce, D. L. Fidal, *On binary differential equations and umbilics*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect.A **111**, (1989), no. 1-2, 147-168.
- [6] J. W. Bruce, M.A.S. Ruas, M.J. Saia, *A Note on Determinacy*, Proc. Amer. Math. Soc. (1992), no. 3, 865-887.
- [7] J. W. Bruce and F. Tari, *On binary differential equations*, Nonlinearity **8**, (1995), 255-271.
- [8] J. W. Bruce and Farid Tari, *Implicit Differential Equations From The Singularity Theory Viewpoint, Singularities and Diferential equations*, Banach Centre Publications, Volume 33, 23-38, Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Warsaw 1996.
- [9] J. W. Bruce and F. Tari, *On the multiplicity of implicit differential*, J. of Differential Equations. **148**, (1998), 122-147.
- [10] J. W. Bruce, *On families of symmetric matrices*, Mosc. Math. J. **3**, (2003),no. 2, 335-360.
- [11] J. W. Bruce and F. Tari, *On families of square matrices*, Proc. London Math. Soc. (3) **89**, (2004), 738-762.

- [12] A. Cima, A. Gasull and J. Torregrosa, *On the relation between index and multiplicity*, J. Londo Math. Soc. **2**, (1998), 57-768.
- [13] M. Coste, *An introduction to o-minimal geometry*, Dottorato di Ricerca in Matematica, Dip. Mat. Univ. Pisa, Istituti Editoriali e Poligrafici Internazionali (2000).
- [14] L. Dara, *Singularité génériques des équations différentielles multiformes*, Bol. Soc. Brasil Math **6**, (1975), 95-128.
- [15] A. A. Davydov, *Normal forms of differential equations unresolved with respect to derivatives in a neighbourhood of its singular point*, Funct. Anal. Appl. **19**, (1985), 1-10.
- [16] A. A. Davydov, G. Ishikawa and W.-Z. Sun, *Generic singularities of implicit systems of first order differential equations on the plane*, preprint
- [17] J.N. Damon, *The unfolding and determinancy theorems for subgroups de  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{K}$* , Mem. Amer. Math. Soc. **50** (1984), no. 306.
- [18] W. Ebeling and S. M. Gusein-Zade, *On the index of a vector field at an isolated singularity*. In: Arnoldfest, edited by E. Bierstone et al., Fields Inst. Commun. **24**, (1999), 141-152. AMS.
- [19] W. Ebeling and S. M. Gusein-Zade, *Indices of 1-forms on an isolated complete intersection singularity*, Mosc. Math. J. **3**, (2003), 439-455.
- [20] D. Eisenbud, H.I. Levine, *An algebraic formula for the degree of a  $C^\infty$  map-germs*, Ann. Math. **106**, (1977), 19-44.
- [21] A. Gabrielov, *Complements of subanalytic sets and existential formulas for analytic functions*, Inventiones Math. **125** (1996), no. 1, 1-12.
- [22] T. Gaffney, *The structure of  $TA(f)$ , classification and an application to differential geometry*, Proc. Sympos. Pure Math. **40**, Amer. Math. Soc. Providence, RI, (1983), 409-427.
- [23] R. Garcia, J. Sotomayor, *Structural stability of parabolic point and periodic asymptotic lines*, Mat. Comtemp. **12**, (1997), 83-102.

- [24] R. Garcia, C. Gutierrez, J. Sotomayor, *Structural stability of asymptotic lines on surfaces immersed in  $\mathbb{R}^3$* , Bull. Sci. Math. **123**, (1999), no. 8 599-622.
- [25] C.G. Gibson, *Singular points of smooth mappings*, Research Notes in Math. 25, Pitman, London (1979).
- [26] X. Gómez-Mont, J. Seade, A. Verjovsky, *The index of a holomorphic flow with an isolated singularity*, Math. Ann **291**, (1991), 737- 751.
- [27] M. Golubitsky, D. Schaeffer, *Singularities and groups in bifurcation theory*, Applied Mathematical Sciences. 51, Springer, Berlin (1985).
- [28] V. Guíñez, *Positive quadratic differential forms and foliations with singularities on surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **309**, (1988), 477-502.
- [29] V. Guíñez, *Locally stable singularities for positive quadratic differential forms*, J. Differential Equations. **110**, (1994), 1-37.
- [30] V. Guíñez and C. Gutierrez, *Rank-1 codimension one singularities of positive quadratic differential forms*, J. Differential Equations. **206**, (2004), 127-155.
- [31] C. Gutierrez and J. Sotomayor, *Lines of curvature, Umbilic points and Carathéodory conjecture.*, Resenhas. **3**, (1998), 291-322.
- [32] H. Hopf, *Differential geometry in the large*, Lectures Notes in Mathematics **1000**, (1971).
- [33] B.L. Keyfitz, *Classification of one-state-variable bifurcation problems up to codimension seven*, Dyn. Stab. Sys. **1**, (1986), 1-41.
- [34] S. Lojasiewicz, *Triangulations of semi-analytic*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci. (3) **18** (1964), 449-474.
- [35] S. Lojasiewicz, *Ensemble semi-analytiques*, Preprint I.H.E.S. (1965).
- [36] J. Mather, *Stability of  $C^\infty$ -mappings, III: finitely determined map-germs* Publ. Math. I.H.E.S. **35**, (1969), 127-156.

- [37] J. Mather, *Stability of  $C^\infty$ -mappings, IV: classification of stable map-germs by  $\mathbb{R}$ -algebras* Publ. Math. I.H.E.S. **37**, (1970), 223-248.
- [38] J. Milnor, *Singular points complex hypersurfaces*, Annals of Mathematics Studies. **61**, (1968).
- [39] T. Nishimura, *Topological  $\mathcal{K}$ -equivalencia of smooth map-germs*, Stratifications, Singularities and Differential Equations, I (Marseille 1990, Honolulu, HI 1990), Travaux en Cours, 54, Hermann, Paris (1997) 82-93.
- [40] G. M. Khimshiashvili, *On the local degree of a smooth mapping*, Trudy Tbiliss. Mat. Inst. **64**, (1980), 105-124.
- [41] J. Seade, T. Suwa, *A residue formula for the index of a holomorphic flow*, Math. Ann **304**, (1994), 345- 360.
- [42] M.H. Schwartz, *Champs radiaux et préradiaux associés à une stratification*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **V. 303**, 1986, no. 6, 239-241.
- [43] M.H. Schwartz, *Une généralisation du théorème de Hopf sur les champs sortants*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **V. 303**, 1986, no. 7, 307-309.
- [44] M.H. Schwartz, *Champs radiaux sur une stratification analytique*, Travaux en Cours. **V.39**, Hermann, 1991.
- [45] J.C. Tougeron, *Idéaux de fonctions différentiables*, Ann. Inst. Fourier. **18**, (1968) 177-240.
- [46] J.C. Tougeron, *Idéaux de fonctions différentiables*, Ergebnisse, Band 71, Springer-Verlag (1972).
- [47] C.T.C. Wall, *Finite determinacy of smooth map-germs*, Bull. London Math. Soc. **13**, (1981), no. 6, 481-539.
- [48] H. Whitney, *On singularities of mappings of Euclidean spaces I, Mappings from the plane to the plane*, Ann. of Math. **62**, (1955), 374-410.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)